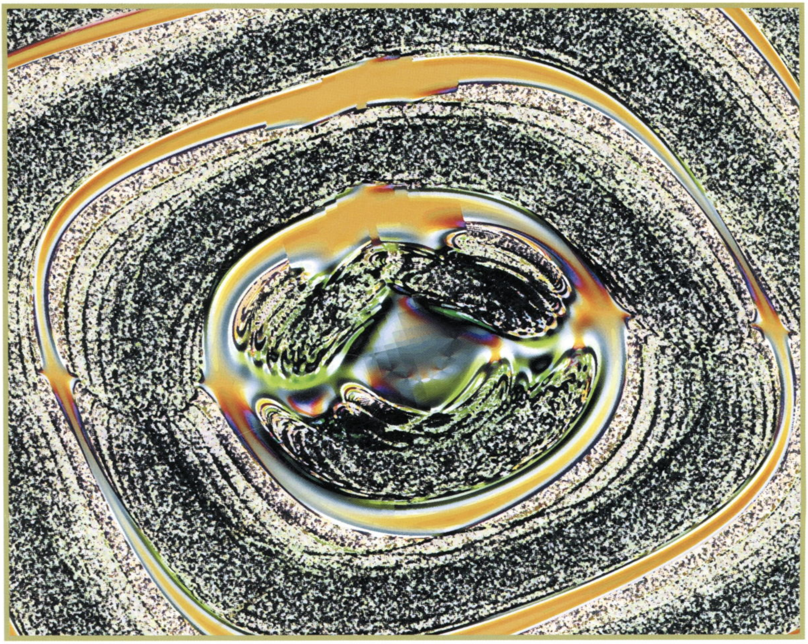
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2003年5月1日発行　第41巻5号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

5
2003

特集 〈質量〉とは何か
さまざまな横顔と新たなイメージ



No.479

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 479 May 2003

〈質量〉とは何か

さまざまな横顔と新たなイメージ

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は１年間（本誌のみ）11,000 円，１年間（本誌＋別冊２冊）14,500 円，半年間（本誌のみ）5,500 円，半年間（本誌＋別冊１冊）7,250 円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2000 年/8 省略
2000 年/9　暗号の数理
/10 脳と心の量子論
別冊　数論の歩み
/11 数理物理における代数解析的方法
/12 20世紀科学革命の基礎
2001 年/1　時間とは何か
/2　微分幾何の新世紀
/3　物質とは何か
/4　場の量子論の新たな方向
別冊　量子力学の発展
/5　電磁気学と現代物理学
/6　量子情報と量子コンピュータ
/7　スピンはさらにめぐる
/8　ゲノムサイエンスの新地平
/9　点，粒子，場
/10 ヒッグスの謎
別冊　生命情報科学の拡がり
/11 空間概念と物理学
/12 数学による物理の表現
2002 年/1　〈システム〉という見方
/2　ナノスケールの物理世界へ
/3　物理定数のプロフィール
/4　M 理論とは何か
別冊　現代物理と現代幾何
/5　物理学とポテンシャル
/6　DNA：紐の物理
/7　波動関数のミステリー
/8　熱力学の多彩な展開
/9　真空：その真実と物理像に迫る
/10 エコノフィジックス最前線
別冊　脳情報数理科学の発展
/11 エキゾチックな量子の世界
/12 数理工学の地平
2003 年/1　保存則とは何か
/2　素粒子的宇宙論の新展開
/3　量子力学とカオス
/4　〈波〉の魅力と数理
別冊　量子情報科学とその発展

数理科学臨時別冊一覧

01 年/9　計算物理入門
01 年/11 エコノミックゲームセオリー
01 年/12 演習　場の量子論
02 年/2　複雑系脳理論
02 年/5　探索のアルゴリズムと技法
02 年/6　はじめての逆問題
02 年/7　化学物理入門
02 年/8　有限要素法による構造解析事例集
02 年/9　基礎からの力学系
02 年/11 独立成分分析
02 年/12 時系列解析入門
03 年/1　物理数学ノート
03 年/2　数学の未解決問題
03 年/3　量子論の基礎
03 年/5　微分幾何講義

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
弘栄堂書店（吉祥寺）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
大盛堂（渋谷）
芳林堂（池袋）
リブロ池袋店（池袋）
ジュンク堂書店（池袋）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
旭屋池袋店
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）
旭屋船橋店
友朋堂（つくば）
三省堂名古屋店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂サンパル店（神戸）
ジュンク堂書店（姫路）
ジュンク堂書店（大分）
宮脇書店岡山本店
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）

――大学生協・売店――
東京大学　本郷・駒場
東京工業大学　大岡山・長津田
東京理科大学　新宿・野田
早稲田大学　理工学部
慶応義塾大学　矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学　大学会館書籍部　第一学群書籍部
埼玉大学・千葉大学
名古屋大学　北部厚生会館
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学　理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学　常三島
愛媛大学　城北
山形大学　小白川
島根大学
学習院大学　成文堂

May 2003 MATHEMATICAL SCIENCES Number 479

特集／〈質量〉とは何か

質量とは何だろうか

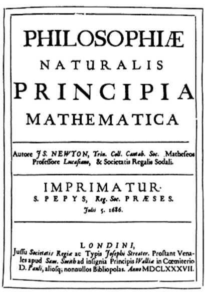
江 沢 洋

1. 原点に立ちかえれば

ニュートンの『プリンキピア』は歴史上で最初に力学を体系づけた本である．本当の名を *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*，すなわち『自然哲学の数学的諸原理』[1] という．その表紙（図 1）[2] に

> Autore *I.S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali

とあるのは，およそ


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

Autore *J S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostant Venales apud *Sam. Smith* ad insignia Principis *Walliæ* in Cœmiterio D. *Pauli*, aliosq; nonnullos Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

図 1　プリンキピアの表紙．

> 著者　I.S. ニュートン，トリニティ・コレッジ，ケンブリッヂ ルカシアン数学教授，王立協会フェロー

という意味だが（Autore は Autor の属格：… による），さて *Soc.* とは何だろう？ 友人のケンブリッヂ大学・社会学教授マクデモットさんに訊ねたところ，これは Soius の略で，Fellow，すなわち，ケンブリッヂ学院のフェローという意味だとわかった．

1.1 『プリンキピア』における質量

『プリンキピア』はユークリッドの『幾何学原論』を手本に書かれたと言われ，『原論』が「点とは部分のないものである」から始まるように，定義から始まる．その第 1 が

> **定義 1**　物質量とは，物質の密度と体積をかけて得られる物質の測度である

である．念のために原語を英訳して書いておこう：

物質量 = Quantity of matter,
体積 = Magnitude,
測度 = Measure.

そこで，定義 1 を意訳すれば，「物質の量とは密度と体積の積のことで，これで物質を測るのである」とでもなろうか．

この「物質量」が今日いうところの「質量」に

あたる．と，いうのは

> **定義 2**　運動量とは，速度と物質量とをかけて得られる運動の測度である

とされ

> **定義 4**　外力とは，物体の状態を，静止からであろうと直線上の一様な運動からであろうと，変えるために物体に及ぼされる作用である

に続いて

> **法則 2**　運動量の変化は，及ぼされる起動力に比例し，その力が及ぼされる直線の方向におこる

とされているからである．

今日，ニュートンの運動の法則は，質点について

$$\text{質量を } m, \quad \text{速度を } \boldsymbol{v} \tag{1.1}$$

とし

$$\text{運動量を } \boldsymbol{p} := m\boldsymbol{v} \tag{1.2}$$

と定義して

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{p}(t)}{dt} = \boldsymbol{f} \tag{1.3}$$

と書かれる．$\boldsymbol{f}$ が当の質点にはたらく力である．これが『プリンキピア』の法則 2 に当たるとすれば，運動量の定義からいって（物質量）$= m$ となる．

なお，法則 2 で「運動量」としたのは原文では単に「運動」と書かれているようだが，運動の測度は定義 2 によって運動量だから，「運動の変化」も運動量の変化で測るはずである．

1.2 密度が先か，質量が先か？

この定義 1 が大問題[4] になった．ここでいう「物質の密度」とは何だろうか？（質量）/（体積）ではないか？ そうだとしたら，この定義は循環していて定義にならないではないか．

板倉聖宣によれば，ニュートンの時代には，すべての物質は同じ原子からできていると考えられていた[3]．密度とは単位体積あたりの原子の数で，物質固有の量である，というわけだ．われわれは，『プリンピキア』が 1687 年という早い時期に出版されたのに対して，元素の概念を確立したラボアジェの『化学要論』は 1789 年，元素ごとに原子を考えたドルトンの『化学の新体系』は 1808 年になって出たことを思い出そう．

マッハは 1883 年に出した『力学の批判的発展史』[5] の中でこう言っている：

> 物質量それ自体があいまいなものである．多くの著者たちが行なっているように，仮想的な原子の数に帰着させようとしても事情は変わらない．もちろん，化学的性質が等しい物体をたくさん集めた場合には「物質量」という言葉に明快な表象を結びつけることができ，運動の変化に対する抵抗がこの量とともに増すことも承認できる．しかし，化学的同等性を棄てた場合には ……

これは，一応もっともらしく聞こえるけれども，ドルトンの原子がすでに原子量をあたえられていたのだから，これを勘定に入れて各種の原子の数から物質固有の密度を定義することができたはずだと思われるかもしれない．ベルセーリウスは 1808 年から 10 年間に当時知られていた 49 の元素のうち 45 種について原子量を決定していた．

しかし，考えてみると，そもそも原子量は，物質の質量を測って，それから計算するのである．したがって，原子の種類が 2 以上になると，われわれは再び循環的定義に陥ることになる．

今日では，物質の質量の大部分は原子核が担い，その原子核は主に陽子と中性子からなること，そして陽子と中性子の質量はほとんど等しいことが知られている．こうして事態はニュートンの 1 種の原子にもどったともいえる．物質の密度とは，その単位体積が含む核子（陽子と中性子の総称）の数（かける核子の質量）であるということができる．

もっとも，これは電子たちの質量を無視している点で厳密でないし，それに物質の単位体積の中

にある核子の数をかぞえて密度をきめることは，実際にはできない．

1.3 力の法則から

今日のわれわれは種々の力の法則を知っている．だから運動の法則 (1.3) の右辺は既知として，それを加速度 dv/dt で割って物体の質量とすることが考えられる．こうして出した質量が，どんな力で実験しても物体ごとに一定となる（物体固有の量となる）ことが (1.3) の「法則」たる所以だ．

マッハは，ニュートンの

法則 3　2 つの物体の相互の作用は常に相等しく逆向きである

を基本的なものとみなし，次の定義を与えている：

比較用の物体 A が別の物体 B の作用によって得る加速度が，その物体 B が A の反作用によって得る加速度の $-m$ 倍であるとき，物体 B の質量は A の質量を単位として m であるとする

しかし，ここまでくると，(均一物質の場合) 質量が体積に比例するというニュートンの言明の大切な側面が失われてしまう．

ここで次のことも問題になる．物体 A, B, C があるとし，A と B，B と C の質量が上の定義によって等しかったとする．このとき A と C の質量も等しくなるだろうか？

この疑問にマッハはこう答えている[6]．3 つの弾性体 A, B, C が完全に滑らかな剛体でできた輪

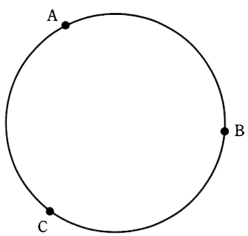


図 2　マッハの思考実験．

の上を動けるようにする（図 2）．A と B の質量が等しいなら，A に速度を与えると，B に衝突してその速度を与える．B と C の質量が等しければ，B の速度は衝突によって C に移る．もし C が A より大きい質量をもっていたら C が A に衝突したとき A は始めより大きい速度をもらい，C はなお速度を残していることになる．そうすると，一巡するごとに系の運動エネルギーが増す．これは，あり得ないことである．

2. 相対論的な質量

動く地球の上で測っても光の速さが方向によらないというマイケルソン–モーレイの実験結果から，相対性理論は「光速不変」を仮定する．その結果として力学の法則が変わり，物体の質量が物体の速さに依存することになる．速く動けば質量が大きくなるのである．これは質量とエネルギーは同じものだという認識に導く．

光速不変とは，こういうことだ．いま，一つの慣性系 O–xyz をとり，それに対して一定の速度 V で走る系 O′–$x'y'z'$ を考える．これも慣性系だ．両者の対応する座標軸は互いに平行とし，時刻 $t = t' = 0$ には両者の原点は一致していたとしよう．

いま時刻 t, t' といった．同一の事象に対しても，それがおこった時刻は 2 つの座標系で異なるとしなければならない．奇妙なことだが，そうしないと光速の不変は得られないのである．

時刻 $t = t' = 0$ に座標原点 $x = x' = 0, \cdots, \cdots$ でフラッシュをたく．その光の波面が O–系で見て時刻 t に x まできたという事象を考える．その同じ事象が O′–系からは時刻 t' に x' にきたと見えたとしよう．光速不変というのは

$$x = ct, \quad x' = ct' \tag{2.1}$$

が同時に成り立つことを意味する．c が光速である．x–軸の負の向きに進んだ波に対しては

$$x = -ct, \quad x' = -ct' \tag{2.2}$$

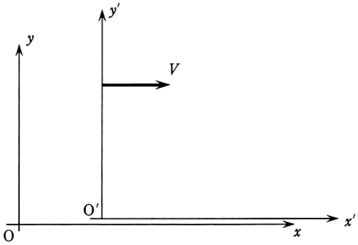


図 3　相互に運動する 2 つの慣性系．同じ 1 つの点 P の座標が一方の系では $x, \cdots, \cdots$，他方の系では $x', \cdots, \cdots$ に見える．

が同時に成り立つ．

2.1 ローレンツ変換

いま，(2.1), (2.2) を

$$x'^2 - (ct')^2 = x^2 - (ct)^2 \tag{2.3}$$

と書いてみよう[7]．そして

$$\frac{x' + ct'}{x + ct} = \frac{x - ct}{x' - ct'} \quad (=: \kappa) \tag{2.4}$$

と変形する．この共通の値を κ とおけば

$$x' + ct' = \kappa(x + ct), \quad x' - ct' = \frac{1}{\kappa}(x - ct)$$

となるから

$$x' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\kappa} + \kappa\right)x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\kappa} - \kappa\right)ct, \tag{2.5}$$

$$ct' = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\kappa} - \kappa\right)x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\kappa} + \kappa\right)ct \tag{2.6}$$

が得られる．

ところで，O′ は O に対して速度 V で走っているのだから

$$\text{O}'\text{–系の } x' = 0 \text{ は O–系の } x = Vt \tag{2.7}$$

に見える (図 3)．(2.5) で言えば，その第 1 式から

$$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\kappa} + \kappa\right)Vt - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\kappa} - \kappa\right)ct$$

となるので

$$\kappa^2 = \frac{1 - (V/c)^2}{1 + (V/c)^2}.$$

したがって，$\kappa = \sqrt{[1 - (V/c)^2]/[1 + (V/c)^2]}$ となるから，(2.5) に代入すれば

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad ct' = \frac{ct - (V/c)x}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \tag{2.8}$$

が得られる．これが**ローレンツ変換**である．同一の事象を O–系で見た座標 (x, t) と O′–系で見た座標 (x', t') を結びつける．

2.2 速度の合成

座標系 O で x–軸方向に速さ v で走る点 m がある．これを O′–系から見たら速さはいくらに見えるか？ O–系で見て，点 m は

時刻 t に，座標 x にいた．時刻 $t + \Delta t$ には，座標 $x + \Delta x$ にいた

のだが，これを O′–系で見ると

時刻 t' に，座標 x' にいた．時刻 $t' + \Delta t'$ には，座標 $x' + \Delta x'$ にいた

のである．そして，$\Delta x/\Delta t = v$ である．$v' = \Delta x'/\Delta t'$ はいくらになるか？

(2.8) から

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad c\Delta t' = \frac{c\Delta t - (V/c)\Delta x}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$$

が得られるので，辺々割って

$$v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - V\Delta t}{c\Delta t - (V/c)\Delta x}c.$$

をだし，$\Delta x/\Delta t = v$ を思い出して

$$v' = \frac{v - V}{1 - \dfrac{vV}{c^2}} \tag{2.9}$$

を得る．これが，O–系で速度 v で走る点 m を O′–系で見たときの速さである．単純に $v - V$ となるのではないことに注意しよう．これを v について解いてみると

$$v = \frac{v' + V}{1 + \dfrac{v'V}{c^2}} \tag{2.10}$$

が得られる．(2.9) の V を $-V$ に変えただけの式

だ．O′–系から見ると O–系は $-V$ で走っていることになるのだから，これは当然といえば当然のことである．でも，当然のことが，ちゃんと出てくるのはうれしい．同じことは (2.8) に既にある．

ここで $v' = c$ としてみる．O′–系で速度 c で走るものを O–系から見たら c より速く走っているように見えるだろう．そう思うのだが (2.10) で $v' = c$ とおくと，意外にも

$$v = \frac{c+V}{1+\dfrac{cV}{c^2}} = c$$

となる．速度が c を越えることはないのだ！

2.3 相対論的な力学

速度 v で走っている質点 m に力 f が時間 Δt の間はたらいて速度が $v + \Delta v$ に変ったとしよう．$\Delta v/\Delta t$ と f との関係はニュートンの (1.3) と同じだろうか？

違うかもしれない．それでも，$|v| \ll c$ ならニュートンの法則 (1.3) は成り立つだろう．

もし，そうなら，ある瞬間に m と一緒に動く座標系 O′ に移って見れば，そこではニュートンの法則 (1.3) は成り立つ．この座標系で

$$m\frac{\Delta v'}{\Delta t'} = f \tag{2.11}$$

を書いて，これをローレンツ変換 (2.8) で O–系に戻せば，大きな速度 v で運動している m に対する運動法則が得られるだろう．やってみよう．

いま，O–系で見て

時刻 t に，速度 v だった．時刻 $t + \Delta t$ には，速度 $v + \Delta v$ になった

というふうに見えた運動を，O–系に対して速度 $V = v$ で動く O′–系から見るのである．すると質点 m は

時刻 t' に，速度 0，時刻 $t' + \Delta t'$ には，速度 $\Delta v'$ となった

ように見えるはずだ．ただし，(2.9) から

$$\Delta v' = \frac{(v+\Delta v) - v}{1 - \dfrac{v(v+\Delta v)}{c^2}} = \frac{\Delta v}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} \tag{2.12}$$

である．時刻については，やはり (2.8) から

$$ct' = \frac{ct - vx/c}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}},$$

$$c(t' + \Delta t') = \frac{c(t+\Delta t) - v(x + v\Delta t)/c}{\sqrt{1 - \dfrac{(v+\Delta v)^2}{c^2}}}$$

が成り立っている．辺々引いて

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\Delta t. \tag{2.13}$$

したがって，(2.12) と (2.13) から

$$f = m\frac{\Delta v'}{\Delta t'} = \frac{m}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

となる．$\Delta t \to 0$ の極限で

$$\frac{m}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{dv}{dt} = f$$

が得られた．これが相対論的な運動方程式[8]である．この式は

$$\frac{d}{dv}\frac{v}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \tag{2.14}$$

に注意して

$$\frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = f \tag{2.15}$$

と書き直しておくのがよい．(1.3) にならって

$$\frac{dp}{dt} = f, \quad p := \frac{mv}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{2.16}$$

とするほうがよいかもしれない．

というのは，これまでは x–軸にそった直線運動だけ考えてきたが，この (2.16) の形では，y, z 成分も含めて

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{p} := \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{2.17}$$

というベクトル方程式が成り立つからである．

(1.3) の運動量の式と比べて，相対論的には粒子の質量が

$$m(v) = \frac{m}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{2.18}$$

のように粒子の運動速度とともに変化するのだと考えることができる．粒子が静止しているときの質量 $m(0)=m$ を**静止質量**という．

2.4 質量とエネルギーは同じもの (1)

力 f を受けている粒子が速度 v で動くと，時間 Δt の間には $v\Delta t$ だけ変位するので，その時間の間に力 f は粒子に $fv\Delta t$ だけの仕事をする．粒子のエネルギーはそれだけ増すはずだが，運動方程式 (2.15) によれば

$$fv\Delta t = \left(\frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right)v\Delta t$$

となり，(2.14) を思い出せば

$$\frac{d}{dt}\frac{v}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{1}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{dv}{dt}$$

となって

$$\begin{aligned}
&v\frac{d}{dt}\frac{v}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \\
&= \frac{v}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}$$

という計算ができるので

$$\begin{aligned}
&\text{力 } f \text{ が時間 } \Delta t \text{ の間にする仕事} \\
&= \Delta t \cdot \frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}$$

が得られる．言いかえれば

$$\begin{aligned}
&\text{力 } f \text{ が時間 } \Delta t \text{ の間にする仕事} \\
&= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \text{ の増加}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

が成り立つのである．これは，力が粒子にした仕事が，粒子の

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{2.20}$$

の増加となって現れるということで，E を——付加定数は別として——粒子のエネルギーとみなすべきことを示している．実際，$|v| \ll c$ の場合には

$$\begin{aligned}
E &= mc^2\left\{1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\cdots\right\} \\
&= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots
\end{aligned}$$

となるから，E は非相対論的な場合には——付加定数 mc^2 を別として——ニュートン式の運動エネルギーに帰着する．

こうして，(2.18) で質量が速度とともに増すといったことは，粒子のエネルギーが速度とともに増すという，いわば当然のことと同じ内容であった．粒子のエネルギーは，粒子の質量と

$$E(v) = m(v)c^2 \tag{2.21}$$

の関係にあったのである．ただし，$E(0)=m(0)c^2$ はまだエネルギーとはよべないが，それも実はエネルギーを含むことがわかる．それを見るために少し準備をする．

2.5 エネルギー–運動量のローレンツ変換

O–系で速度 v で走る粒子 m を O′–系で見たときの速さ v' を与える (2.9) を思い出そう．この式を使って

$$\begin{aligned}
1-\frac{v'^2}{c^2} &= \frac{\left(1-\dfrac{vV}{c^2}\right)^2 - \dfrac{(v-V)^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{vV}{c^2}\right)^2} \\
&= \frac{\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\dfrac{vV}{c^2}\right)^2}.
\end{aligned}$$

よって，O–系で速度 v で走る粒子 m を O′–系で見たときのエネルギー E' は

$$E' = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{mc^2 - V\cdot mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

となり，右辺は O–系でのエネルギー (2.20) と運動量 (2.16) を用いて

$$E' = \frac{E - Vp}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{2.22}$$

と書くことができる．これは，時空座標のローレンツ変換のうち時間の変換式と同じ形をしている ($E \to ct, p \to x/c$ の対応)．同様の計算から

$$p' = \frac{p - VE/c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{2.23}$$

を証明することができる．これは，同じ対応のもとで x–座標の変換式と同じ形である！ (2.22), (2.23) を合わせて**エネルギー–運動量のローレンツ変換式**という．

これらの式を逆に解けば

$$E=\frac{E' + Vp'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\ \ p=\frac{p' + VE'/c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{2.24}$$

が得られる．(2.22), (2.23) と比べて今度も V の符号が反転しただけである．

2.6 質量とエネルギーは同じもの (2)

箱に入った理想気体を考える．箱は，O–x 座標系で見て x–軸の正の向きに一定の速度 V で走っているとしよう．さきの O′–x' 座標系は箱に固着していることになる．箱の中の気体分子に番号をつけて，k 番めの分子の O′–x' 系で見た運動量を p'_k，エネルギーを E'_k とする．O′–x' 系は気体の静止系だから

$$\sum_k p'_k = 0 \tag{2.25}$$

が成り立っている．和は分子たちのすべてにわたる．

さて，分子 k を O–x 系から見ると，そのエネルギーと運動量は (2.24) で与えられる：

$$E_k = \frac{E'_k + Vp'_k}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad p_k = \frac{p'_k + VE'_k/c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{2.26}$$

気体の全エネルギー $\mathcal{E}$，全運動量 $\mathcal{P}$ は (2.26) をすべての気体分子にわたって総和すれば得られる．総和するとき (2.25) に注意すれば

$$\mathcal{E} = \frac{(\mathcal{E}'/c^2)c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad \mathcal{P} = \frac{(\mathcal{E}'/c^2)V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{2.27}$$

となる．これは

$$\text{質量}: \mathcal{M} = \mathcal{E}/c^2 \tag{2.28}$$

の物体が速度 V で走るときにもつエネルギー，運動量と同じである！ 箱に入れた理想気体の静止質量は，その静止系で分子たちがもつ（全エネルギー）$/c^2$ に等しい．

気体を熱すれば分子たちの動きは活発となり，運動エネルギーは増す．そうすると気体の全静止質量も増すのである！ 言いかえれば，気体の静止質量といっている量のなかには気体分子の運動エネルギーが含まれているのだ．

これでも，まだ気体の質量のすべてがエネルギーだということはできない．気体の（質量）$\cdot c^2$ をすべて仕事に変えられるか，どうかはわからない．

しかし，核物理の世界にゆくと，たとえば陽子は反陽子と出会えばガンマ線を発して消滅する．原理的にはガンマ線の圧力を利用して仕事を得ることができるだろう．他の素粒子についても同様である．

いま，いろいろの形のエネルギーについて，それぞれが質量をもつことを検証している余裕はないが，一般に質量とエネルギーとは——c^2 という換算因子こそつくが——同じものと言えるのである．

だから，たとえば核分裂がおこるとき「質量がエネルギーに変る」とよく言うが，これは誤りである．核の質量が減って熱がでたとしても，その

熱が質量をもつのであって，それまで勘定に入れれば全質量は全エネルギーとともに保存している．

3. 量子力学における質量

量子力学における基本方程式は，シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi_t}{\partial t}=\mathcal{H}\psi_t \tag{3.1}$$

である．ただし

$$\mathcal{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x) \tag{3.2}$$

であって，ここに粒子の質量 m が登場する．$\hbar$ はプランクの定数（を 2π で割ったもの），$\psi_t(x)$ が波動関数で，時刻 t と位置 x による．時刻 t に粒子の位置を観測して $(x,x+dx)$ に見出す確率が $|\psi_t(x)|^2dx$ で与えられる．これは，任意の時刻で

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_t(x)|^2dx=1 \tag{3.3}$$

に規格化しておくと，以後 (3.1) によって時間発展するとき，いつでも規格化は保たれていることが証明できる．

たとえば粒子を電子として，その質量を磁場をかけたキリ箱のなかでの軌跡の曲率から古典力学によって求めたとしよう．その値を方程式 (3.1) の m として用いてよい理由はあるだろうか？

キリ箱における軌跡は，空間の小さな範囲でだけゼロでない $\psi_t(x)$——波束（図 4）——が描き出すもので（というには 1 次元の運動では困るのだが，次元を高めるのは読者への宿題として），粒子の位置の確率を重みとする波束の重心

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x|\psi_t(x)|^2dx \tag{3.4}$$

の軌跡としてよい．(3.3) に注意．これが m を質量としてニュートン力学にしたがうことが次のようにして証明されるのである．$X(t)$ を時間微分すれば

$$\frac{dX(t)}{dt}=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\psi_t^*x\frac{\partial\psi_t}{\partial t}+\frac{\partial\psi_t^*}{\partial t}x\psi_t\right\}dx$$

となるから，(3.1) とその複素共役を代入して

$$\frac{dX(t)}{dt}=\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\{(\mathcal{H}\psi_t^*)x\psi_t-\psi_t^*x\mathcal{H}\psi_t\}\,dx \tag{3.5}$$

を得る．この右辺では，被積分関数の第 1 項が

$$(\mathcal{H}\psi_t^*)x\psi_tdx=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_t^*}{\partial x^2}+V(x)\psi_t^*\right)x\psi_tdx$$

だから，$\psi_t=\psi_t(x)$ が x の狭い範囲に局在し，その外ではゼロであることを考慮して部分積分を 2 回すると

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\mathcal{H}\psi_t^*)x\psi_tdx=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_t^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right)x\,\psi_tdx$$

という形になる．(3.5) の被積分関数は，したがって

$$(\mathcal{H}\psi_t^*)x\psi_t=\psi_t^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}x\psi_t+V(x)x\psi_t\right),$$

と $\quad\psi_t^*x\mathcal{H}\psi_t=\psi_t^*x\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_t+V(x)\psi_t\right)$

の差であって，

$$\frac{\partial^2x\psi_t}{\partial x^2}=x\frac{\partial^2\psi_t}{\partial x^2}+2\frac{\partial\psi_t}{\partial x}$$

と $\quad x\dfrac{\partial^2\psi_t}{\partial x^2}$

の差の $-\hbar^2\psi_t^*/(2m)$ 倍となるから，結局 (3.5) は

$$\frac{dX(t)}{dt}=\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_t^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi_t\right)dx \tag{3.6}$$

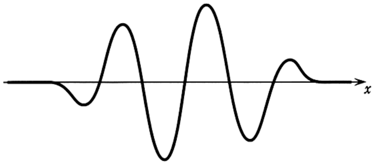


図 4　波束：空間の小さい範囲だけで 0 でない波動．

を与える．

ニュートンの運動方程式にあたるものをだすため，もう一度時間微分すると

$$m\frac{d^2X(t)}{dt^2}$$
$$= \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{(\mathcal{H}\psi_t^*)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi_t\right)\right.$$
$$\left. -\psi_t^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathcal{H}\psi_t\right\}dx$$

となるが，再び部分積分によって

$$m\frac{d^2X(t)}{dt^2}$$
$$= \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\psi_t^*\mathcal{H}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi_t\right)\right.$$
$$\left. -\psi_t^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathcal{H}\psi_t\right\}dx \quad (3.7)$$

という形にできる．この被積分関数は

$$\mathcal{H}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi_t\right)$$
$$= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_t,$$

と $\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathcal{H}\psi_t$

$$= -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right)\psi_t$$

の差の ψ_t^* 倍であって

$$V(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi_t\right)$$

と

$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)V(x)\psi_t = V(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi_t\right)$$
$$-i\hbar\frac{\partial V(x)}{\partial x}\psi_t$$

の差の ψ_t^* 倍となる．よって (3.7) は

$$m\frac{d^2X(t)}{dt^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_t^*\left(-\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)\psi_t dx \quad (3.8)$$

を与える．$V(x)$ は 1 変数の関数なのに，行き掛かり上その導関数を偏導関数の形に書くことになった．

この式は，$\psi_t = \psi_t(x)$ が空間の小さい範囲に局在していて，その範囲で $\partial V(x)/\partial x$ があまり変化しなければ（図 4）——という条件つきだが

$$m\frac{d^2X(t)}{dt^2} = -\left.\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right|_{x=X(t)} \quad (3.9)$$

と書くことができる．これはポテンシャル $V(x)$ の場を動く質量 m の粒子に対するニュートンの運動方程式になっている！

もう一度くりかえすと，波動関数が空間の小さい範囲——$\partial V(x)/\partial x$ があまり変化しない程度の小さい範囲——に局在しているという条件のもとでは波動関数の——存在確率密度を重みとした——重心 $X(t)$ はニュートンの運動方程式にしたがって運動する．粒子の質量の役をするのはシュレーディンガー方程式の m である．

磁場をかけたキリ箱のなかで電子の軌跡の曲率を測るという場合には上の条件はみたされている．こうして，ニュートン力学によってきめた質量の値をシュレーディンガー方程式の m として用いてよいことがわかった．

これはひとまず満足すべき結果であるが，質量が粒子の速度とともに増すという相対論的な効果は期待すべくもない．

4. 粒子系の質量

粒子が 2 個，3 個，… と集まって相互作用している場合，その系全体としての質量はどうなるのだろうか？ たとえば，重陽子は陽子 1 個と中性子 1 個が結合した系である．鉄の塊は多数の原子核と多数の電子からなる，これまた結合系である．陽子や中性子，あるいは原子核や電子の運動は量子力学できまる．その結果として重陽子の重心の運動も量子力学できまることになるが，たとえば，それらの系が重力場におかれた場合，系の運動はニュートンの運動方程式にしたがうだろうか？

答は——いま計算を示す余裕はないが[10)]——イエスである．

それでは，その場合，重心運動の質量に相当す

るのは何になるだろうか？ それは系を構成する粒子の質量の（単純な）和である．重陽子なら陽子と中性子の（静止）質量の和，鉄の塊なら原子核と電子の（静止）質量の総和になる．

これはひとまず満足すべき結果ではあるが，シュレーディンガー方程式をもとにしたのでは質量が粒子の速度とともに増すという相対論的な効果は現れないし，また系の全質量が構成粒子の質量の総和より結合エネルギー分だけ小さいという相対論的な効果もまた現れない．だから，相対論的には満足できない．

5. 相対論的量子力学

質量が粒子の速度とともに増すことを取り入れるには，相対論的な量子力学に移る必要がある．電子の相対論的な波動方程式はディラックの方程式

$$
\begin{aligned}
&i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_t=\mathcal{H}\psi_t,\\
&\mathcal{H}:=c\boldsymbol{\alpha}\cdot(-i\hbar\mathrm{grad}\,)+\beta mc^2+V(x)
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

である．ここに $\boldsymbol{\alpha}$, β は 4 行 4 列のエルミート行列で，交換関係

$$
\begin{aligned}
&\alpha_k\alpha_l+\alpha_l\alpha_k=2\delta_{kl},\\
&\alpha_k\beta+\beta\alpha_k=0,\quad \beta^2=1
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

にしたがう $(k,l=x,y,z)$．ψ_t も，それに伴って 4 行 1 列の縦ベクトルとなる．

これが古典的な相対論的運動方程式に移行することを見るには，前節と同様に考えてもよいが，

$$
\psi_t=\left\{a_0+\frac{\hbar}{i}a_1(x)+\cdots\right\}e^{iS(x)/\hbar}
$$

とおいて $\hbar\to 0$ の極限を考える方法もある[9]．$x=(ct,\boldsymbol{x})$ である．こうすると，最低次で

$$
E-V(x)=c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta mc^2 \tag{5.3}
$$

が成り立つ．ここに

$$
E=-\frac{\partial S}{\partial t},\quad \boldsymbol{p}=\mathrm{grad}\,S \tag{5.4}
$$

である．(5.3) の両辺を 2 乗すれば，(5.2) により

$$
[E-V(x)]^2=c^2\boldsymbol{p}^2+(mc^2)^2
$$

が得られる．あるいは

$$
E=\sqrt{c^2\boldsymbol{p}^2+(mc^2)^2}+V(x).
$$

この S に対する方程式は古典的な相対論的ハミルトン–ヤコビ方程式になっている．

このことから，ディラック方程式の m として古典的方法で測定した静止質量を用いてよいことが結論される．

しかし，これでは，まだ不十分である．

質量の相対論なら，複数の粒子たちが結合状態にあるとき，その結合エネルギーだけ系の質量が減ることが導かれねばならない．これは，なかなか難しい．

物はみなクォーク，グルーオン，レプトンからできているというとき，それらから鉄の塊の質量を導くのは一つの問題である．

参考文献

1) ニュートン『自然哲学の数学的諸原理』，河辺六男訳，世界の名著 26，中央公論社 (1971).
2) 雲井世雄「Newton の Principia について」，物理学史研究 **3** (1967), No.6, p.77.『プリンキピア』の初版本の表紙には 2 種類あることが指摘されている．図 1 はその一つ．もう一つは文献 1) の p.31 にある．
3) 板倉聖宣「ニュートンの質量の定義とガリレイ，ニュートンの原子論」，科学史研究 No.59 (1961) 29–31.
4) 渡辺正雄「ニュートンの ≪ プリンキピア ≫ における質量概念」，科学史研究 No.54 (1956) 1–4.
5) E. マッハ『力学—力学の批判的発展史』，伏見 譲訳，講談社 (1970). p.199. p.227.
6) E. マッハ，前掲．pp.200–203.
7) (2.1) から (2.3) はでない．ここの詳しい議論は省略する．
8) これは結果としては間違っていないが，力の変換を扱っていないので導出法としては不十分である．
9) W. Pauli: *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*, Hb. d. Physik (1933). S. 240.
10) 江沢 洋『量子力学（II）』裳華房, (2002). pp.33–36.

（えざわ・ひろし，学習院大学名誉教授）

時空と重力
相対論

藤本 眞克

1. 慣性と重力：2 種類の質量

物には重さがある．地上で経験する「物の重さ」について考えてみよう．はじめは地面に置かれた荷物を持ち上げるときに経験する「重さ」であるが，これには地球の重力が関係している．同じ荷物を月面上に置いたときの「重さ」はおよそ 1/6 になるが，これは月の重力が弱いためである．それでは，地上でも荷物によって「重い」「軽い」の違いがあるが，それは何が違うためだろうか．ここで，物が持っている属性としての質量という概念が登場する．それでは，次に台車に載せた荷物を水平方向に走らせてみよう．台車は摩擦なしでスムーズに走るものとする．止まっている荷物を動かすときや動いている荷物を止めようとするときにも「重さ」を感じる．荷物が「重い」ほど動かしにくく止めにくいことも通常経験することである．このような物体の運動に関する経験的な事実を整理して共通性や普遍性を持つ運動の法則にまとめたのがガリレイやニュートンである．

ニュートン力学に従って上の例を整理すると，我々が経験する「重さ」とは筋肉にかかる「力」のことであり，はじめの例を式で書くと，

$$F = m_{\mathrm{P}} g \qquad (1)$$

のように力の静的なつりあいを表すものである．ここで F は荷物を持ち上げておくために必要な力で，m_{P} が荷物の属性である質量（厳密に区別すると重力を受ける質量）を表す．また，g は単位質量あたりの重力を表すもので重力加速度と呼ばれる．

その次にあげた例では，荷物が運動を始めたり止まったりする「運動の変化」が出てくる．運動の変化を厳密に言うと運動量の変化のことで，荷物の速度が v_1 から v_2 に変わったときの運動量の変化は $m_{\mathrm{I}}(v_2 - v_1)$ で表される．ここで m_{I} は運動の変化のしにくさを表す物体の属性で慣性質量と呼ばれるものである．高校の物理で出てくるように，運動量の変化は力積に等しく，Δt の時間に力 F が作用したとすると，

$$m_{\mathrm{I}}(v_2 - v_1) = F\Delta t \qquad (2)$$

である．あるいは微分の形で，

$$m_{\mathrm{I}}\frac{dv}{dt} = m_{\mathrm{I}}\frac{d^2x}{dt^2} = F \qquad (3)$$

と表される．

(3) 式は，「運動の変化は及ぼされる起動力に比例し，その力が及ぼされる直線の方向に行われる」としたニュートンの第二法則を示したものである．本来，力や速度は向きを持ったベクトル量であり，位置も位置ベクトルで表されるが，ここでは簡単のため一つの方向の量だけで表現した．ところで，(3) 式で $F=0$ とすると「すべての物体は，外力が働かないかぎり，静止あるいは等速直線運動の状態をそのまま続ける」としたニュートンの第一法則を表すものになっている．しかしながら，これは第二法則が第一法則を自動的に含んでいることを意味するものではない．実は第一法則が成り立つのは特定の座標系（慣性系と言う）に限られる．その座標系に対して加速度運動をしている別の座標系では成り立たない．実際，一つの慣性系 S に静止している物体を，S に対して加速度を持つ系 S′ から見たら，もはや静止していないし等速度運動もしていない．S′ は慣性系ではないのである．したがって，第一法則は慣性系を定義するものと考えられる．また，第二法則は第一法則で定義された慣性系において成り立つものである．S が慣性系であれば，S に対して回転なしの等速度運動をしている座標系も，また慣性系である．この

ことは，座標系のガリレイ変換 ($x \to x+Vt$, $t \to t$) によって $F=0$ と置いた (3) 式が変わらないことから容易に示すことができる．

2. 重力：ニュートンの万有引力

(1) 式と (3) 式を組み合わせると，地球の重力による物体の落下運動は，

$$m_{\mathrm{I}}\frac{d^2x}{dt^2} = -m_{\mathrm{P}}g \tag{4}$$

で記述される．ここで x 軸は重力と逆向きを正の方向にとった．枝からもげ落ちたリンゴの落下運動もこの式で表されるが，ニュートンがリンゴの落下を見たときに発見したと言われている万有引力の法則が (4) 式から導かれる訳ではない．ニュートンは太陽系内の惑星の運動がケプラーの法則に従うことを説明するためには，太陽と惑星の間にその距離の 2 乗に逆比例する引力が働いているると考えるのが自然なことをすでに知っていた．逸話のとおりリンゴの落下を見たときにひらめいたとしたら，それは惑星の一つである地球が太陽に引き付けられる引力とリンゴが地球に引き付けられる引力が同一のものであるという直感であろう．

ニュートンの万有引力の法則によれば，(4) 式は次の 2 つの方程式の一部と考えられる．

$$m_{\mathrm{I}}\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Gm_{\mathrm{P}}M_{\mathrm{A}}}{r^2}, \tag{5}$$

$$M_{\mathrm{I}}\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{GM_{\mathrm{P}}m_{\mathrm{A}}}{r^2}. \tag{6}$$

ここで，$m_{\mathrm{I}}, m_{\mathrm{P}}, m_{\mathrm{A}}$ および $M_{\mathrm{I}}, M_{\mathrm{P}}, M_{\mathrm{A}}$ はそれぞれ落下物体と地球の，慣性質量，重力を受ける質量，重力を及ぼす質量で，G は万有引力定数である．また，x と X は落下物体と地球の重心の位置を表す座標値（天頂方向を正の向きとした）で，相互の距離は $r=|x-X|$ である．(5) 式および (6) 式の右辺はそれぞれの物体に作用する力（重力）を表すが，ニュートンの第三法則（作用・反作用の法則）によれば，これらは向きが逆で大きさが等しいことから，$m_{\mathrm{P}}M_{\mathrm{A}} = M_{\mathrm{P}}m_{\mathrm{A}}$，すなわち $m_{\mathrm{P}}/m_{\mathrm{A}} = M_{\mathrm{P}}/M_{\mathrm{A}}$ が常に成り立つ．この比は一定なので万有引力定数に繰り込んで 1 とすることができ，$m_{\mathrm{P}} = m_{\mathrm{A}} \equiv m_{\mathrm{G}}$（重力質量）と表して，重力を受ける質量と重力を及ぼす質量は区別せずにどちらも重力質量と呼ぶ．

(6) 式は地球がリンゴの引力に引き付けられる運動を表すが，実際にはリンゴの質量が地球の質量に比べて無視できるほど小さいので，地球の運動はリンゴの運動に比べて無視できて，(5) 式がリンゴの落下運動を記述する方程式となる．また，M_{G} を地球の重力質量とすると，

$$g = \frac{GM_{\mathrm{G}}}{r^2} \tag{7}$$

が地球の重力加速度である．よく知られているように地表でのこの値はおよそ $9.8\,\mathrm{m/s^2}$ である．(7) 式を (5) 式に代入すれば，(4) 式になる．

地上での物体の落下運動の観測から，地球重力による加速度が物体の種類や組成，内部構造によらず同じであることを指摘したのはガリレイである．(4) 式を書き換えた，

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{m_{\mathrm{G}}}{m_{\mathrm{I}}}\right)g \tag{8}$$

からも分かるように，重力による加速度が物体の種類によらず同じであることは，慣性質量と重力質量の比が物体の種類や組成によらず一定であることを示しており，これは重力に特有の性質を表す一つの事実である．この事実を示すものとして，ピサの斜塔でガリレイが行ったとされる落下実験が有名であるが，同様に彼が発見した振り子の等時性（振り子の周期は重りの物体の種類によらず振り子の長さだけで決まり，振れ幅にもよらず一定であること）もこの事実を裏付けるものである．なお，慣性質量と重力質量の比も万有引力定数に繰り込むことで 1 とすることができ，区別の必要がないときには，単に質量と呼ばれる．

3. 弱い等価原理：その検証

慣性質量と重力質量が等しいこと，あるいはその結果として，重力による加速度が物体によらないことは，「弱い等価原理」と呼ばれている．この原理は後で述べるように，一般相対論をはじめとする重力理論の基礎となる重要な原理であるので，常に実験的に検証される必要がある．弱い等価原理を検証する素朴な方法は，ピサの斜塔を使った落下実験に代表される，物体ごとに重力加速度を計測して比較する方法である．重力加速度は，物体を実際に落下させてレーザー測距などで落下距離を時間の関数として計測する方法や，振り子にしてその周期から求める方法などで測定される．どちらの方法も地球の重力加速度を測る重力計として用いられており，今では 10 億分の 1 の相対精度で重力加速度が測定されている．検証の精度を高めるエレガ

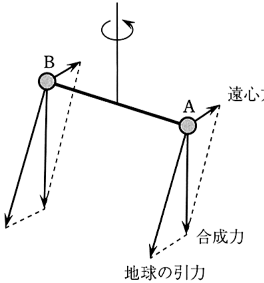


図 1　エトベッシュの実験の原理：等価原理が破れて合成力が A と B で異なるとねじれる．

ントな方法として重力加速度の差を直接計測する「零点法」が用いられている．エトベッシュが行った有名な実験の原理を図 1 に示す．実験室に対して静止している物体には，地球の重力のほかに，地球の自転運動に伴う遠心力が慣性力として働いている．もし重力質量と慣性質量が 2 つの物体で異なっていれば，重力と遠心力を合成した力の向きや大きさに違いが出る．ねじれ秤の両端に付けた 2 つの物体に働く力の差を，ねじれ秤の平衡点のずれとして精度よく計測できる．エトベッシュは装置を 180 度回転した位置でも計測を行うことで装置のアンバランスによる影響を取り除いて，様々な組合せの物質に対して 2 億分の 1 の精度で重力質量と慣性質量に差がないことを確かめたのである．19 世紀末の当時としては画期的な精度であった．その後，太陽の重力と公転運動に伴う遠心力を用いることで精度を高める工夫やねじれ秤の改良などによって，現在では 10 兆分の 1 以下の精度で弱い等価原理は検証されている[1)]．

検証の中身についてもう少し考えてみよう．これまで重力質量や慣性質量と呼ぶときに物体をひとかたまりとして考えてきた．しかし実際の物体は原子核と電子から成る原子や分子から構成されている．原子核自体も核子 (陽子や中性子) が結合したものであるし，核子や電子などの素粒子もクォークの結合体と考えられる．また，特殊相対論で得られた有名な関係式 $E = mc^2$ はエネルギーと質量が等価であることを示している．なお，特殊相対論が慣性系での運動法則であることから，この質量は慣性質量を表すものである．これらのことから，物体の慣性質量は一般に次のように表される．

$$m_{\mathrm{I}} = \sum_{\mathrm{A}} E^{\mathrm{A}}/c^2 \qquad (9)$$

ここで，E^{A} は物体を構成する基本粒子の静止質量エネルギーと，電磁相互作用，弱い相互作用，強い相互作用による各種の結合エネルギーを表している．これら各種エネルギーごとに重力との作用が異なって弱い等価原理が破れているとすると，物体の重力質量は

$$m_{\mathrm{G}} = m_{\mathrm{I}} + \sum_{\mathrm{A}} \eta^{\mathrm{A}} E^{\mathrm{A}}/c^2 \qquad (10)$$

と書くことができ，η^{A} はエネルギーごとの弱い等価原理からのズレの相対量を表す．これから，物体による加速度の差は，$\sum_{\mathrm{A}} \eta^{\mathrm{A}} E^{\mathrm{A}}/m_{\mathrm{I}}c^2$ の物質による差に比例する．

物体によって各種結合エネルギーの割合が異なることを利用して，電磁力，強い力，弱い力から生じる各種結合エネルギーに対する弱い等価原理の検証を行うことができる[2)]．

4. 弱い等価原理：その意味するもの

もう一度 (8) 式を見てみよう．弱い等価原理により $m_{\mathrm{G}} = m_{\mathrm{I}}$ である．(8) 式が成り立っている慣性系に対して等加速度 $a = -g$ で運動する座標系に移る座標変換：$x = X + at^2/2$ を行うと (8) 式は，

$$\frac{d^2X}{dt^2} + a = -g \qquad (11)$$

となるので，

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -a - g = 0 \qquad (12)$$

である．この式は弱い等価原理によりどんな物体でも (同じ等加速度系で) 成り立つ．

逆に (8) 式で $g = 0$ となる状態 (慣性系で重力がない場合) から出発して，前と同様な座標変換によって等加速度系に移った場合，

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -a \qquad (13)$$

となるので，重力があるときの (8) 式に似た関係が成り立つ．このように，重力があっても自由落下運動と同じ加速度を持つ等加速度系では慣性の法則が成り立つように見え，逆に重力がなくても等加速度系ではあたかも重力による自由落下運動が起きているように見える．

そこで，発想を転換して (12) 式をニュートンの第

一法則のように慣性系を定義しているものと考えたらどうだろうか？ 重力があるときに自由落下している系を慣性系と考え，従来のニュートン力学的な慣性系はもはや慣性系ではないと考える．アインシュタインの天才的な着想である．彼は弱い等価原理をそれまでの事実から原理へと昇格させ，一般相対論の基盤に据えた．

5. 曲がった時空間の導入

重力により自由落下している系を慣性系と見なすことになった．しかしこれは従来ニュートン力学や特殊相対論で考えられてきた平坦な時空間の概念とその中での大局的な慣性系（1 つの慣性系で時空間全体をカバーする）という考え方とは相容れないものである．それは，一般に重力は場所ごとに大きさや向きが異なるため，ある場所での自由落下の加速度を使った座標変換ではすべての場所で重力加速度をキャンセルすることができないからである．

それにもかかわらず新しい着想を推し進めるためには，大局的な慣性系という概念を放棄する必要がある．こうして導入されたのが，曲がった時空間の中での局所的な慣性系という考え方である．曲がった時空間の各点で接平面たる平坦な時空間をとると，それが局所慣性系を表し，そこでは物体の慣性運動が等速直線運動になる．この局所的な直線を繋ぎ合わせたものは測地線と呼ばれ，幾何学的には曲がった時空間の中での最短曲線であり，物理的には重力による運動を記述する．

地球表面を例にとると，全体は球面であるが我々が日常生活する範囲での地面はほぼ平坦である．この平坦な地平面が局所的な慣性系であって，そこでの最短距離は直線である．しかし遠く離れた 2 地点を結ぶ最短距離の経路はもはや直線ではなく，地球の中心を円の中心とする大円の円弧になることはよく知られている．

さて，一つの自由落下する慣性系に着目しよう．例として，ロープが切れて地球の重力中を自由落下しているエレベーターの中を考えよう．エレベーターの中は重力の影響（重力加速度）は消えており無重力である．それでは，重力の有無を調べる手段はないのだろうか？ ヒントは重力の影響が場所ごとに異なる点にある．エレベーターの中が無重力と言ったが，厳密に言えば，無重力はエレベーターの重心の一点でのみ成り立ち，それ以外の場所では僅かながら重力の影響が残っている．例えば地表での重力加速度を g とすると (7) 式から高さが 1 m 上がればそこでの重力加速度は $3\times10^{-7}g$ だけ小さくなるので，重心で打ち消しが行われると重心より 1 m 上では重力加速度が上向きに $3\times10^{-7}g$ だけ残り，重心の下 1 m では下向きに $3\times10^{-7}g$ の重力加速度が残ることになる．同様に重心から水平方向に 1 m 離れた場所では重力加速度の重心に向かう水平成分が $1.5\times10^{-7}g$ だけ残る．このように鉛直方向（重力源の方向とその反対方向）には引き離し，水平方向（重力源に垂直な方向）には引き付けるような力が，重心からの距離に比例する大きさで働くのを見ることによって，落下エレベーターの中でも重力の存在が知れるのである．

潮の満ち引き（潮汐）を引き起こすのもこれと同じ理屈である．月や太陽の重力によって地球は自由落下を続けている．エレベーターの例と違って，いつまでも月や太陽にぶつからないのは，直線的に落下しているのでなく，あらかじめ重力と垂直の方向に運動しているため，運動を続けようとする慣性に起因する力（慣性力）が遠心力として働き，重力とつりあいを保っているためである．しかしこのつりあいも厳密に成り立つのは地球の重心である．地球の表面にある海水に対しては，重力の大きさと向きが重心での重力と異なるため，落下するエレベーターの中と同じように，重力源（月や太陽）の向き（およびその反対向き）には重心から引き離される力が働き，満潮になる．それに垂直な向きには重心に引き付ける力が働くため，干潮となる（図 2）．このように場所による重力の差が潮汐作用を引き起こすことから，このような作用を起こす重力の差は潮汐力と呼ばれる．

一方，(13) 式で与えられるような加速度運動から生じる見かけの重力（一様重力）には潮汐力は現れない．そのため，真の重力の有無は場所による重力の差である潮汐力を調べることによって分かる．潮汐力は幾何学的には曲がった時空間において局所平面（局所慣性系）からのズレで生じるものであり，曲がった時空間の曲率にその影響が含まれる．

6. アインシュタインの等価原理

これまでは重力を含む力学的運動だけについて論じてきた．アインシュタインは弱い等価原理から一歩踏み出して，重力による自由落下をしているすべての系で，同一の物理法則が成り立つと考えた．自由落下している観測者は局所的には重力の影響が全く感知され

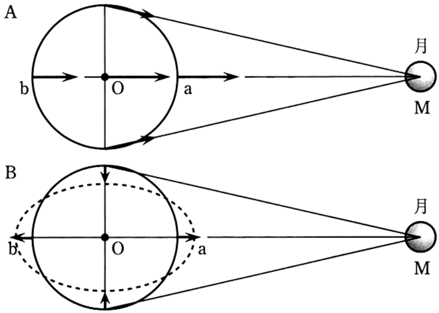


図 2　潮汐力の説明：上の図 A は地球各点が月から受ける重力加速度を示し，下の図 B は地球重心で（自由落下によって）重力加速度が打ち消されるときに各点に残る重力加速度を示す．これが潮汐（点線）を引き起こす．

ない（弱い等価原理）だけでなく，そこではすべての物理法則が重力がないときと同様に成り立つ．これは「アインシュタインの等価原理」と呼ばれ，特殊相対論でローレンツ変換で結ばれる慣性系どうしで成り立っていた相対性原理（同一の物理法則が成り立つこと）を拡張して，重力自由落下しているどの系においても相対性原理が成り立つことを主張するものである．

アインシュタインの等価原理は，弱い等価原理と，自由落下する 1 つの局所慣性系での実験結果はローレンツ変換で結ばれた他の局所慣性系（すなわち同じ位置にあって互いに等速運動している慣性系）でも成り立つとする「局所ローレンツ不変性」，および局所慣性系での実験結果は何時，何処の局所慣性系でやっても同じとする「位置不変性」の 3 つから論理的に導けることが分かっており，それぞれについて実験的検証が行われている．弱い等価原理の検証については前に述べた．

ローレンツ不変性は，等速運動の影響が運動方向とその他の方向での物理現象の差（非等方性）として現れないかどうかを調べることで検証される．特殊相対論で有名なマイケルソンとモーリーの実験では，光速度の等方性から電磁法則のローレンツ不変性が検証されている．また，ヒューズとドレーバーはリシウム原子核の慣性質量に非等方性があるとした場合の上限値を核磁気共鳴によるエネルギー準位の変化の測定から得た．外部磁場中に置かれた核スピンが 3/2 のリシウム原子核は基底状態が 4 つのエネルギー準位に分かれる．エネルギー準位は慣性質量が等方的であれば等間隔に並ぶため，核磁気共鳴による共鳴周波数は 1 つの周波数だけになる．しかし，もし慣性質量に非等方性があれば，エネルギー準位の間隔が等間隔からずれるので，複数の共鳴周波数が現れる．核磁気共鳴は共鳴周波数を高い周波数分解能で測定できるので，測定された共鳴周波数が 1 つにしか見えないということは，たとえ周波数差があっても 0.04 Hz 以下という制限を課すことができる．これは慣性質量の非等方成分がエネルギー換算で 1.7×10^{-16} eV（電子ボルト）以下であることに対応する．原子核の慣性質量は一般的には (9) 式で与えられるため，慣性質量の非等方成分は，

$$\delta m_{\mathrm{I}} \approx \sum_{\mathrm{A}} \delta^{\mathrm{A}} E^{\mathrm{A}}/c^2 \tag{14}$$

となる．ここで δ^{A} は慣性質量に寄与する強い力，電磁気力，弱い力のそれぞれについてローレンツ不変性が破れて非等方成分が生じる場合の割合を示す．これから δ^{A} の上限値がそれぞれ 10^{-23}, 10^{-22}, 10^{-17} と得られ，この精度まではローレンツ不変性が成り立つことが示される[3]．

位置不変性の検証の一つに，重力赤方変位の実験があげられる．今地表から上向きに光を発射し，高さ h の場所で受信したとする．光の周波数を発射時が ν_{e}，受信時が ν_{r} として，地表での重力加速度を g とすると，

$$\frac{\nu_{\mathrm{e}}}{\nu_{\mathrm{r}}} = 1 + \frac{gh}{c^2} \tag{15}$$

によって，受信する光の周波数が発射時より低くなる．つまり波長が長い（すなわち赤い）ほうにずれる．こ

れは，(15) 式を

$$h\nu_{\rm e} = h\nu_{\rm r}\left(1+\frac{gh}{c^2}\right) \tag{16}$$

と書き直せば，重力ポテンシャルを含めて光子のエネルギーが保存することを示したものと考えられる．一方，この現象を自由落下系で考えてみると，発射の瞬間に発射点で静止から自由落下に移った座標系は，光が上に届くまでの時間 (h/c) に下向きに加速され，速度 $g(h/c)$ を得る．そのため，この自由落下系で受信する光の周波数 $\nu'_{\rm r}$ と受信点で静止した系で測った周波数 $\nu_{\rm r}$ は，ドップラー効果により，

$$\frac{\nu'_{\rm r}}{\nu_{\rm r}} = 1+\frac{g(h/c)}{c} \tag{17}$$

で関係付けられる．(15) 式と (17) 式を比較すると，$\nu_{\rm e} = \nu'_{\rm r}$ となり，発射時は静止系と自由落下系が一致しているので，結局，重力赤方変位で示されるのは，自由落下系においては光の周波数が変わらないということである．この議論では，重力加速度を一定としたが，g を重力ポテンシャルの勾配に置き換え，h を光の経路に沿った微小距離として積分すれば，$\Delta\phi$ を 2 地点の重力ポテンシャルの差として，

$$\frac{\nu_{\rm e}}{\nu_{\rm r}} = 1+\frac{\Delta\phi}{c^2} \tag{18}$$

となる．1960 年代前半にパウンドらは核ガンマ線の周波数変位をメスバウアー効果を利用して測定し，1%以下の精度で (15) 式が成立することを確かめた．またベッソーは 1976 年にロケットに積んだ水素メーザー時計により高度 1 万 km と地上での時計の進み方を比較し，(18) 式が成り立つことを 0.02%以下の精度で確かめている．

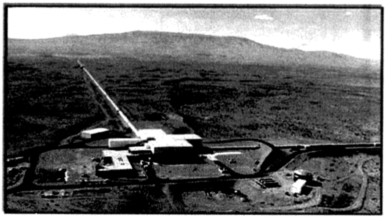
時間や空間が大きく隔たった所との比較から物理定数や素粒子の質量などが現在の我々のものと同じかどうかを調べることも，位置不変性の確認としては興味あるところである．アフリカのガボン共和国にあるオクロ鉱山で産出する天然ウランは，他で産出されるウランに比べ，ウラン 235 の含有量が低く，調べてみると 20 億年前から自然に核分裂の連鎖反応が起こっている天然の原子炉であると考えられている．アイソトープ比の異常から見積もられるウラン 235 の消費量は，過去 20 億年の間で核のエネルギー準位がほとんど一定であったことを示唆するものであり，そこから微細構造定数の変化率は宇宙年齢の間でも 6×10^{-7} 以下であることなどが分かっている．また，クエーサーなど遠方にある天体のスペクトル線の観測からも，電子と陽子の質量比や微細構造定数の時間変化の上限値が得られている[2)]．

位置不変性の検証は他の 2 つ，弱い等価原理と局所ローレンツ不変性の検証に比べれば精度はよくないが，これが破れているという証拠は得られていない．アインシュタインの等価原理が成り立つような重力理論は，メトリック（計量）を付与された時空間の幾何学的な性質で重力の影響を記述する「メトリック理論」と呼ばれるものに限られることが示されている．アインシュタインの一般相対論はもちろんこの範疇に含まれる．

7. 強い等価原理

(9) 式および (10) 式で物体の結合エネルギーごとに弱い等価原理が成立するか否かを検証する考え方を示したが，重力の結合エネルギーについては言及しなかった．それは弱い等価原理（さらにはアインシュタインの等価原理）が重力で結合した物体を対象外としていること，さらには地上実験で用いられる物体では自己重力による結合エネルギーが極端に小さく実験精度と比べて無視できるためでもあった．しかしながら，月や地球のような天体スケールでは重力による結合エネルギーの影響が現れる可能性がある．月と地球は相互の重力作用によって互いの周りを回る一方で，太陽の重力を受けて一緒に公転運動をしている．つまり太陽の重力を受けてそれぞれが落下運動をしているのである．その加速度が等しいことは自明だろうか？ 自己重力による結合エネルギーに対しても等価原理が成り立つとする仮説を強い等価原理と呼んでいる．アインシュタインの一般相対論は強い等価原理も満たすことが証明されているが，アインシュタインの等価原理を満たす他の重力理論のほとんどは強い等価原理が破れていることを予言する．さて，地球の重力による結合エネルギーと質量エネルギーの比はおよそ 20 億分の 1 であるが，月については重力の結合が弱くエネルギーの比は地球の約 25 分の 1 である．そこで他の重力理論のように強い等価原理が破れているとすると，太陽の重力による加速度が月と地球で異なることになり，地球周りの月の周回軌道が太陽方向に引き伸ばされる効果（ノルトベット効果）が予想される．しかしながら，月レーザー測距による月の軌道の精密測定でこの効果が観測されないことから，月と地球の太陽重力による加速度は 2 兆分の 1 の精度で等しいこと，ノルトベット効果を予言するブランス・ディッケ理論に

LIGO Hanford Observatory
(米国ワシントン州)



LIGO Livingston Observatory
(米国ルイジアナ州)

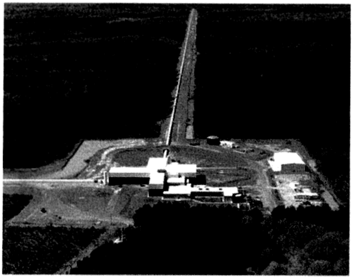


写真 1　LIGO：米国の 1 辺 4 km の大型レーザー干渉計重力波望遠鏡の航空写真．
2002 年に運転開始した．

対してはスカラー場の結合定数 ω が 1000 より大きく一般相対論との差が小さいこと，が結論されている[4]．

8. 重力理論とその検証

曲がった時空間の中で物体の運動や重力以外の物理法則がどのように影響されるかは，アインシュタインの等価原理を適用して導くことができるようになった．重力理論として完結するためには，曲がった時空間がどのように作られるか，物質やエネルギーによってどれだけ時空間が歪むか，を記述する「場の方程式」が必要である．一方，場の方程式が与えられると，それを解くことによって様々な現象や効果を量的に計算したり予言することができるようになる．しかしながら，一般相対論における場の方程式であるアインシュタイン方程式でもそうであるように，非線形の偏微分方程式を厳密に解くのは特別の場合を除き困難である．しかしながらブラックホールや宇宙初期のように重力の非線形性が効く場面以外では，重力エネルギーを質量エネルギーで割った値が 1 に比べて十分に小さくニュートン的重力から逐次的に近似を進めたポスト・ニュートン近似が有効である．メトリック理論で表される多くの重力理論をポスト・ニュートン近似の範囲で包括的に表現する「パラメータ化されたポスト・ニュートン（PPN）形式」がウィルによって定式化されており，重力理論を検証する枠組みとして使われている．

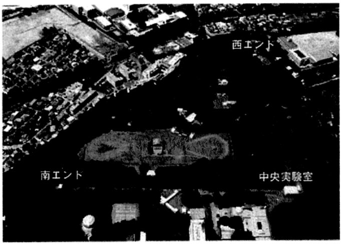
太陽の重力を利用した重力理論のテストとして，光の経路の曲がりと伝播時間の遅れ，および水星の近日点の前進があり，連星パルサーとして発見された連星中性子星の少し強い重力効果を利用したテストとしては，重力波放出の反作用を含む相対論的諸効果の無矛盾性の確認があげられる[5]．これまでに行われたテストではいずれも一般相対論と矛盾する結果は出ていない．

多くの重力理論が重力波の存在を予言する．重力波は連星パルサーの電波観測で測定された連星軌道周期の短縮が重力波放出の反作用で説明できることで間接的に存在が証明されているが，まだ直接的な検出には至っていない．しかしながら，日本では 1 辺 300 m のマイケルソン干渉計型の重力波観測用レーザー干渉計が 1999 年の運転開始以来，感度と安定度を着実に上げ，銀河系周辺の重力波発生であれば十分に検出できるレベルで観測できるようになっている[6]．さらに 2002 年の後半からは米国で建設されてきた 1 辺 4 km の巨大なレーザー干渉計が 3000 km 離れた 2 カ所で運転を始め，ドイツでも 600 m のレーザー干渉計が動き出した（写真 1，2）．2003 年には日米独で同時観測を実施して，本格的な重力波探査のための国際観測網の形成に向けた共同研究がスタートしようとしており，重力波の直接観測が手の届くところまできている．重力波を直接観測することによって，その偏波や伝播速度の測定，さらには強い重力場にある重力波源の振舞いによる重力理論の検証が可能になるかもしれない．

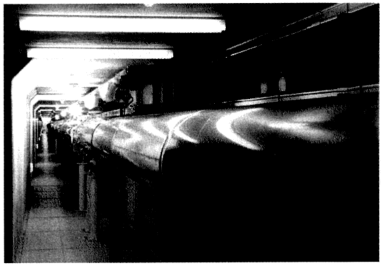
9. おわりに

重力を時空の幾何学的な性質としてとらえる一般相

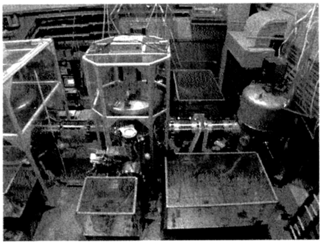
TAMA300 航空写真（国立天文台・三鷹）



地下通路に設置されたTAMA300の真空パイプ



TAMA300 中央実験室内部



真空層内部で振り子式に懸架されたミラー



写真 2 TAMA：日本（国立天文台・三鷹）の 1 辺 300 m のレーザー干渉計重力波望遠鏡．1999 年に運転開始した．

対論をはじめとする重力の「メトリック理論」の根拠を与える等価原理について解説した．等価原理は原理と名が付くとおり，重力理論の基幹をなすものであるため，常に実験的に検証される必要があり，様々な角度からの批判にも耐えて理論的にも強化されるべきものである．実験的な検証では，ここでは省いたがスペースシャトルでの精密な検証実験がいくつか計画されており，また今まさに幕が開こうとしている重力波の検出が実現すれば新しい検証が可能となることが期待される．理論的には，量子論との融合が重要な課題になると思われる[7]．重力の量子論の完成はさておき，超伝導のように量子相関を持つ対になった粒子の非局所的な運動やトンネル効果のように波束の拡がりが本質的に問題となる現象に対する重力の影響は等価原理で正しく取り込めているのであろうか．

参考文献

1) S. Baessler ほか, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3585.
2) C.M. Will, *Living Reviews in Relativity* (2001-4) http://www.livingreviews.org/Articles/Volume4/2001-4will/.
3) C.M. Will, *Theory and experiment in gravitational physics*, (Cambridge Uni. Press, 1993).
4) クリフォード・M・ウィル：『アインシュタインは正しかったか？』，松田・二間瀬訳，TBS ブリタニカ，1989 年．
5) 太陽系や連星パルサーによる検証については，たとえば，藤本眞克，別冊・数理科学「重力理論」(1999) 21 を参照．
6) 重力波検出の現状については，たとえば，『宇宙を探る新しい目—重力波—』，クバプロ，2002 年を参照．
7) 葛西真寿，数理科学，No.442 (2000) 40，二間瀬敏史，別冊・数理科学「重力理論」(1999) 146 など参照．

（ふじもと・まさかつ，国立天文台宇宙計量部門）

質量の起源を探る

標準模型を超えて

坂井 典佑

1. 質量と不確定性原理

原子核を構成する陽子や中性子をまとめて核子と呼ぶが，この核子の間には**強い力**が働く．強い力は力が強いというだけではない．もう一つの重要な特徴として，近くに近付いたときだけ強く働くという性質がある．原子の大きさは 10^{-8}cm 程度だが，その程度の距離に近付いても，中性子は陽子や中性子からほとんど何の力も受けないので，自由に原子の中に入っていく．陽子についても，電磁気力も働くという点を別にして強い力だけを考えれば，全く同様に短距離でしか力は働かない．散乱現象の実験事実から，核子は 10^{-13} cm 程度まで近付いて初めて強い力を受けることがわかる．

量子力学の基本的原理は「波動性と粒子性の二重性」である．これによると，すべての物質は波動であると同時に粒子である．この原理を強い力に対して適用することによって，1935 年に湯川秀樹博士はいわゆる湯川中間子を予言した．核子は近くに核子があれば強い力を及ぼす．したがって，電磁場と同様に「強い力の場」が生じている．この強い力の場も空間・時間的に波動として伝播していく．量子力学に従って，この波動は量子化され，粒子として振る舞う．このようにして量子力学の基本原理を用いて予言された粒子が湯川中間子である．今日では，湯川中間子はパイ粒子と呼ばれる．

一つの核子がパイ粒子を放出し，そのパイ粒子がもう一つの核子に吸収されることを考えよう．核子が余分にパイ粒子を作ると，核子 1 個よりもエネルギーが高くなり，エネルギーの保存則に反する．しかし，量子力学の基本的な原理の一つである**不確定性原理**によると，有限の観測時間 Δt の間に無限に正確にエネルギーを測定することはできない．プランク定数を $\hbar$ として，エネルギーの不確定性を ΔE とすると

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$

という関係がある．したがって，核子がパイ粒子を放出しても，

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{\Delta E} \approx \frac{\hbar}{m_\pi c^2}$$

程度の短時間であれば，そもそもエネルギーはその大きさくらい不確定なのだから，エネルギー保存則に矛盾しない．このように短時間だけ許されるパイ粒子を仮想的パイ粒子と呼ぶ．この仮想的パイ粒子の効果のおよぶ範囲は，それが光速 c で到達できる距離

$$\Delta r \approx c\Delta t \approx c \cdot \frac{\hbar}{m_\pi c^2} = \frac{\hbar}{m_\pi c}$$

である．この到達距離が 10^{-13} cm だとすると，パイ粒子の質量が予想できて陽子の五分の一程度となる．

1947 年実際にパイ粒子が発見され，湯川の予言が見事に確認された．湯川理論は，**質量と力の到達距離**に直接関係があることを示し，量子力学，より正確には場の量子論の重要な検証を与えている．同時に新しい粒子の予言を行うことによって，現代の素粒子物理学の端緒となった．

2. 複合粒子の質量と非摂動効果

今日の素粒子物理学の標準的な理解では，陽子・中性子・パイ粒子など，強い力が働く物質はハドロンと呼ばれ，基本粒子とは考えられていない．ハドロンはクォークと呼ばれる基本構成粒子からできている．では，ハドロンの質量は一体どのようにして決まるのであろうか？ ここで重要になるのは，ゲージ理論の非摂動効果である．

クォークは3種類のカラー（色）と呼ばれる量子数を持ち，グルーオンと呼ばれるゲージ粒子がそれらの間に交換されることによって，強い力が媒介される．3種類のカラーがあるので，この理論は $SU(3)$ というゲージ群に基づいたゲージ理論であり，量子色力学（QCD）と呼ばれる．量子色力学を摂動論で取り扱うと，高エネルギーにいけばいくほど有効結合定数が小さくなることが分かる（漸近的に自由な理論）．したがって，高エネルギーでは摂動論が適用でき，実際に実験事実にもよく合致している．逆に，陽子・中性子など，通常のハドロンの質量程度のエネルギーでは，力が強すぎるので，量子色力学に摂動論が適用できない．さらに，グルーオンが一つ一つ単体で取り出せたことは一度もない．今日ではクォークやグルーオンは決して単体で取り出せるものではないと考えられている．このように，粒子が決して単体で取り出せない状況を閉じ込めと呼んでいる．量子色力学の有効結合定数が1程度の大きさになるエネルギースケールを Λ と呼ぶと，すべてのハドロンの質量スケールはこの Λ の程度になる．したがって，摂動論によらない方法で，閉じ込めを説明し，さまざまなハドロンの質量が Λ の何倍になるかを計算することがハドロン質量を予言するための未解決の課題である．そのための有力な方法として，格子ゲージ理論などが精力的に研究され，超大型計算機を用いた大規模計算が発展している．

一方，湯川理論が予言したパイ粒子の質量は，そのほかのハドロン（核子など）の質量に比べて異常に小さい．この事実は対称性の観点から南部陽一郎博士によって見事な説明が与えられた．基本理論に対称性があるのに，その対称性を破る状態が実現するほうがエネルギー的に有利であるという場合が起こることがある．このような場合に，対称性が自発的に破れたという．**対称性が自発的に破れる**と，質量零の粒子が生じる．この粒子を**南部・ゴールドストン粒子**と呼ぶ．

量子色力学では，左巻き・右巻きのクォークはまったく同じ振舞いをする．さらに，核子などを作るアップ・クォークやダウン・クォークの質量は，零として大変よい近似である．厳密に零の質量であれば，右巻きと左巻きの粒子の数は別々に保存する．この対称性はカイラル対称性と呼ばれる．パイ粒子はこのカイラル対称性の自発的な破れに伴う南部・ゴールドストン粒子である．アップ・クォーク，ダウン・クォークがわずかに零でない質量を持つとすると，パイ粒子が零でない小さな質量を持っていることもうまく説明できる．

閉じ込めやカイラル対称性の破れは，摂動論では決して解くことができない．ゲージ理論で**非摂動的効果**を取り入れた低エネルギー有効理論を導出する方法はまだ十分発達していない．しかし，超対称性がある場合には，非摂動効果の研究が，近年たいへん進んだ．

3. ゲージ粒子の質量とヒッグス機構

中性子は放置しておくと10分くらいで自然に崩壊して陽子と電子とニュートリノになる．

$$n \to p + e + \bar{\nu}_e.$$

この相互作用はゆっくりとしか起こらない．この崩壊現象を起こす力を**弱い力**と呼ぶ．弱い力には，パリティを破るという特異な性質がある．その点を除けば，弱い力は電磁気力と大変よく似ている．電磁気力は光子という粒子を交換することによって生じる．それと同様に，光子に似たベクトル粒子が交換されて弱い力が生じるとすると，大変よく実験事実に合致する．この弱い力を媒介するベクトル粒子をW粒子と呼ぶ．ただ，弱い力は電磁気力に比べて力がたいへん弱い．この決定的な違いを出す原因は，光子の質量が零なのに対して，W粒子の質量が核子の質量の100倍程度の大きさであるとすると，ちょうどよく説明できる．このような質量有限のベクトル粒子を理論的に矛盾なく与えるには，**ゲージ理論**に自発的対称性の破れを組み合わせる必要があった．これを**ヒッグス機構**と呼ぶ．弱い力を媒介するベクトル粒子の質量が，ヒッグス機構によって理解できることになった．自発的に破れたゲージ理論は，繰り込み可能な理論なので，原理的に任意の次数の量子効果を摂動論を用いて計算でき，その予言を実験的に検証することが可能である．こうしてでき上がった理論が，**電弱統一理論**である．電弱統一理論と量子色力学を合わせて**標準模型**と呼ぶ．

電弱統一理論では，$SU(2)$ と $U(1)$ という2つのゲージ群を用い，ゲージ対称性を自発的に破るために，ヒッグス場 ϕ を導入する．ヒッグス場が値を持つほうがエネルギー的に有利なように，図1に示したようなメキシコ帽子型のポテンシャルを仮定する．

$$V(\phi) = -\mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2.$$

その結果，ヒッグス場に真空期待値 $\langle\phi\rangle = v/\sqrt{2} = \sqrt{\mu/2\lambda}$ が生じ，その大きさに応じてゲージ粒子Wの質量 $M_{\rm W}$ が決まる．

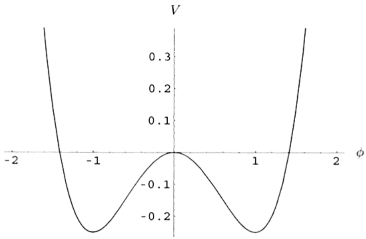


図1　メキシコ帽子型のヒッグス場ポテンシャル．

$$M_W = \frac{g_2 v}{2}.$$

一方，ヒッグス場のうちで粒子として生き残る粒子は物理的なヒッグス粒子と呼ばれている．この粒子の質量 $m_{\rm higgs}$ はポテンシャルの平らな方向と直交する方向の曲率で決まる．

$$m_{\rm higgs} = \sqrt{2\mu} = \sqrt{2\lambda}v.$$

λ はヒッグス粒子が関与する物理現象以外には登場しないので，ヒッグス粒子が発見されない限り，実験的に決定するのはたいへん難しい．ヒッグス粒子の質量を予言するには，標準模型を超える理論が必要である．このヒッグス粒子をめぐる問題は今日の素粒子物理学の大きな課題である．

世代	第一	第二	第三
クォーク q	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$
レプトン l	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$

一方，ゲージ粒子とヒッグス粒子以外に物質がある．物質の基本粒子のうち，強い力が働く物質の基本構成粒子がクォークであり，強い力が働かないものはそれ自身が基本粒子でレプトンと呼ばれている．レプトンもクォークもまったく同じ量子数を持ったものが繰り返し現れる．これを世代と呼ぶ．今日までの実験で，表に挙げたように3つの世代があることが分かっており（少なくとも軽いクォークとレプトンは），それ以上存在しないと思われる間接的な証拠がある．

クォークは質量を持ち，右巻きと左巻きのクォークが存在している．レプトンの中でも電子（e）・ミュー粒子（μ）・タウ粒子（τ）のように電荷を持つ粒子はやはり質量を持ち，右巻きと左巻きの粒子が存在している．しかし，ニュートリノについては，最近まで質量があるという証拠はなかった．また，左巻きニュートリノは観測されているが，右巻きニュートリノの存在を示す直接的な証拠はない．しかし，後で述べるように，ニュートリノにはわずかだが質量があるという実験的証拠が最近得られている．右巻きニュートリノが存在するとすれば，ニュートリノのわずかな質量を説明する最も簡単な模型が得られる．

4. 大統一理論と基本理論の質量スケール

標準模型の確立によって，力の統一はたいへん進んだ．しかし，標準模型ではまだ3つの異なるゲージ結合定数が必要であった．標準模型には，たしかにゲージ原理が共通しているが，強い力，電磁気力，弱い力という3つの別々の力に対応して，3つのゲージ結合定数が独立に存在している．これらは実験で決めるべきパラメターで，それらの大きさを理論で決めることはできない．このように，本当の意味での統一ができたわけではなく，概念的な原理の共通性というレベルに留まっている．

この不満足な点を改善するために，1974年にジョージャイ（Georgi）とグラショー（Glashow）の提案した理論が**大統一理論**（Grand Unified Theory）と呼ばれるものである．略してGUTと呼ばれることも多い．結合定数を完全に統一するためには，単一のゲージ群に基づいてゲージ理論を作ればよい．

単一のゲージ群という考え方の直接の帰結として，そうした理論では非可換群を採用することになる．そのとき電荷も非可換群の無限小変換の演算子として得られる．したがって，このような電荷はとり得る値（固有値）が離散的となり，**電荷の量子化**が起こる．これは，自然界で実際に観測されている粒子の電荷には，単位の電荷の整数倍のものしか存在していないという事実をよく説明している．一方，標準模型には，$U(1)$というゲージ群が電弱統一理論の一部として含まれている．このため，電荷が量子化されるという論理的必然性はない．大統一理論は結合定数の統一と，電荷の量子化という2点で標準模型よりも満足できる理論となっている．

さらに，大統一理論では，一般的にはクォークとレプトンを同じ多重項の中に含んでいる．したがって，大

統一理論で新たに登場するゲージ粒子の中には，クォークとレプトンの間の遷移を引き起こすものがある．理論の詳細によって予言は異なるが，簡単な理論では，この遷移によって**陽子崩壊**が起こることが予言されている．量子効果によって，有効な結合定数はエネルギーとともにゆっくりと変化する．この変化はゆっくりとしか起こらないので，大統一が起こるエネルギースケール $M_{\rm GUT}$ は陽子の 10^{16} 倍程度というたいへん大きなものになる．陽子崩壊を引き起こすゲージ粒子の質量もこの程度であると予想される．したがって，陽子の寿命は宇宙年齢よりも長い．このようになかなか陽子が崩壊しないからこそ，我々の世界が安定に存在できるということになる．このようなわずかの効果でも，十分に大量の試料を集めてたいへん精度よく測定すれば実際に実験で検証することができる．

最小 $SU(5)$ 大統一模型は，たいへんパラメターが少ないので，陽子崩壊についてもはっきりした予言をすることができる．一方，陽子崩壊実験については，世界各国で多くの努力が積み重ねられてきた．特に，日本の神岡鉱山にある**カミオカンデ**，**スーパー・カミオカンデ**という観測装置で行われている実験は世界的にも類を見ない優れた実験である．この装置では特別に工夫された大型の光電子増倍管がきわめて多数配置されている．巨大なタンクの中にきわめて大量の水を入れ，その中で起こる陽子崩壊やニュートリノ反応を光電子増倍管で観測する．水は透明度がよいので，物質として用意した大量の水のどこから出た信号も観測可能になる．1987 年には，**超新星からのニュートリノ**を人類史上初めて観測することに成功した．この成果に対して，2002 年度のノーベル物理学賞が小柴昌俊博士に授与されたことは記憶に新しい．また，太陽からのニュートリノについて精度の高い観測を行い，ニュートリノ振動が起こっていることを示唆するデータを得た．最近では，空気中で生成されたニュートリノを観測することによって，**ニュートリノに質量があり，振動現象が起こっている**という証拠を与えることにも成功している．もしも陽子崩壊の検証に成功すれば，さらに画期的な成果となるであろう．

また，大統一理論はニュートリノの質量を説明する模型を自然に提供することができる．まず，右巻きニュートリノが存在するとする．右巻きニュートリノがあれば，通常の左巻きニュートリノとの間で通常のレプトン（電子など）程度の質量項を持つことができる．適切な模型だと，右巻きニュートリノは自分自身との間で質量項を持つ．この質量は高次効果で生じるのが常なので，標準模型のエネルギースケール $M_{\rm W}$ と大統一理論のスケール $M_{\rm GUT}$ の中間の大きさの質量になる．この 2 つの質量項を組み合わせると，左巻きニュートリノには右巻きニュートリノがわずかに混合し，実際に観測されるニュートリノ質量はたいへん小さくなる．この考え方によると，他の手段ではなかなか観測できない大統一理論など，高いエネルギーで成り立つ基本理論に対する貴重な情報を，ニュートリノの質量と振動のパターンの観測から得ることができると期待される．

5. ゲージ階層性の 3 つの解

3 つの力を統一する大統一理論は陽子の質量の 10^{16} 倍程度のたいへん大きなエネルギースケールを，特徴的なスケールとして理論の中に持ち込んだ．大統一理論が基本理論だとすると，この大きなスケールこそが理論の基本的なスケールであって，大統一理論を解いた結果，現在我々が観測している標準模型のエネルギースケール，すなわち陽子の 100 倍程度のスケールが出てこなければならない．

この点をもう少し明確にとらえるために，まず標準模型で粒子の質量を考えてみよう．ゲージ対称性が自発的に破れる前には，ゲージ粒子の質量は零でなければならない．逆に，標準模型のゲージ粒子が大統一の巨大なスケールの質量を持たず，低エネルギーにまで生き残ってきたのは，標準模型のゲージ対称性によって守られていたからだと考えることができる．一方，クォークやレプトンは，左右非対称な量子数のせいで，右巻き粒子と左巻き粒子が直接結合できず，質量項を持てない．したがって，ゲージ対称性が自発的に破れて初めて，クォークやレプトンは質量を持つ．このように，クォークやレプトンが低エネルギーに生き残るのは，基本理論の作用の中に質量項がもともと存在せず，左巻きと右巻きの粒子数が別々に保存するせいである．これは先ほど述べたカイラル対称性にほかならない．以上のように，低エネルギーでゲージ粒子とクォーク・レプトンが生き残ってくる理由はゲージ対称性およびカイラル対称性として，対称性の意味で理解できる．

これに対して，ヒッグス粒子だけは，低エネルギーに生き残ってくる理由を対称性という形で特徴付けることができない．もちろん，スカラー粒子の質量が零になると，スケール変換の下で不変となり，**スケール**

不変性という対称性が生じるように見える．しかし，量子論ではスケール不変性は保つことのできない対称性である．実際，量子効果を計算してみると，2 次発散が出てきてしまう．意味のある計算をするためには，この発散を一時的にせよ防いで取り扱わざるを得ない．この際，質量スケールを導入せざるを得なくなる．こうして元の古典論にスケールがなくても，量子論にはどうしてもスケールが入ってしまう．したがって，スカラー粒子が低エネルギーに生き残るように守るための，直接の対称性は今のところ存在しない．

W 粒子の質量 M_W が弱い力の典型的なエネルギースケールである．一方，基本理論には巨大なエネルギースケール（たとえば M_{GUT}）が入っている．その基本的なスケールに比して大変小さなスケール（具体的には M_W など）が電弱ゲージ対称性の破れのスケールとして実現していなければ実験事実と合致しない．また，仮に大統一理論を採用しない立場に立っても，重力のスケールは陽子質量の 10^{19} 倍程度である．こうした巨大なスケールの比をどのようにして説明するかという問題を**ゲージ階層性の問題**と呼んでいる．今までに，ゲージ階層性問題に，次の 3 つの解が考えられた．

1. ヒッグス粒子のような基本粒子は存在しない．低エネルギーでヒッグス粒子と見えたものは，実は基本粒子ではなく，未知の基本粒子の複合系である．たとえば，クォークからできているハドロンを例にとってみよう．ヒッグス粒子はちょうどその中のパイ粒子のような複合粒子であると考える．ヒッグス粒子の複合粒子模型は量子色力学の場合の「色」にちなんで，**テクニカラー**という名前で呼ばれている．この立場では，ヒッグス粒子の役割を果たす複合粒子の模型を作り，それを用いてクォークやレプトンの質量を説明することが基本的な課題となる．テクニカラーは魅力的であるが，質量を説明するための現実的な模型はまだできていない．

2. ヒッグス粒子は基本粒子として存在する．この立場では，直接ヒッグス粒子の質量が小さいことを保証する対称性は存在しないが，他の粒子と組み合わせることによって，質量が小さくなることを保証する．具体的にはフェルミ粒子（ヒグシーノ）との対称性を仮定し，このフェルミ粒子にカイラル対称性を課すと，スカラー粒子も対称性の意味で質量が零になることを保証できる．このようなフェルミ粒子とボース粒子の間の対称性を一般に**超対称性**と呼ぶ．

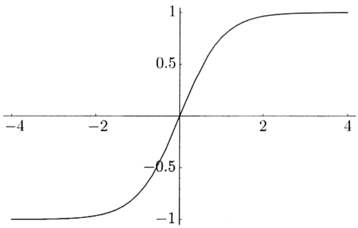


図 2　真空状態が 2 つあると，それらの間をつなぐ場の配位があり得る．これは一種の位相欠陥であり，位相的に安定である．これに垂直な方向が 4 次元であれば，キンク状の部分（ブレーン）を我々の時空の模型として採用できる（余剰次元模型）．

$$\begin{array}{ccc} \text{ヒッグス場} & \longleftrightarrow & \text{ヒッグシーノ} \\ m_0 = 0 & \textbf{超対称性} & m_{1/2} = 0 \\ & & \uparrow \\ & \text{カイラル対称性} & \end{array}$$

超対称性は，摂動論的に取り扱うことができ，現時点で最も現実的な模型を提供している．このため，最も多くの研究者が研究しており，次世代の加速器・非加速器実験で発見するべき課題の目安となっている[1,2]．

3. そもそもゲージ階層性そのものが存在しない．この主張が成り立つためには，まず，大統一を諦める．さらに，重力が弱いという事実を説明する理由として，基本理論は我々が通常観測している 4 次元時空よりも高次元の時空であると仮定する．この高次元時空の中の位相的欠陥，たとえば図 2 のような壁状の部分空間として，我々の 4 次元時空が存在すると考える．これが観測事実と矛盾しないためには，標準模型で登場するクォークやレプトンなどがこの 4 次元部分空間上に閉じ込められているとすればよい．これを一般に**余剰次元模型**と呼ぶ．超弦理論に登場するブレーンから名をとって，**ブレーン・ワールドのシナリオ**とも呼ばれており，この可能性は近年大きく発展している[4]．

6. 超対称理論における質量

自然界には，2 つの同種粒子の入れ替えに対して波動関数が対称な粒子（ボース粒子）と，反対称な粒子

（フェルミ粒子）がある．これらの間の対称性が超対称性である[1]．超対称性は，統一理論のゲージ階層性を説明する最も有力な考え方である[2]．また，超弦理論の安定性のためにも欠くことができない[3]．

超対称性については既に 1960 年代に宮沢弘成博士によって先駆的な考え方が示されたが，歴史的には幾多の曲折を経てきている．1970–1971 年頃，4 次元時空での相対論的な超対称性はゴルファント（Golfand）とリックトマン（Likhtman）やヴォルコフ（Volkov）とアクロフ（Akulov）ら一部の理論家たちが相対論的な定式化を構成した．しかし，今日知られている形での超対称性が認識されるようになったのは，1972 年にウェス（Wess）とズミノ（Zumino）が超対称な 4 次元の場の理論を実際に構成してみせて以後である．また，弦理論を契機としてさらに超対称性の重要性が認識されるようになった．この進展に触発されて重力を含む超対称性理論として超重力理論がウェスとズミノら多くの研究者によって考案された．その後もファイエ（Fayet）らが現象論的な模型の可能性を追求した．しかし，1981 年には，ディモプロス（Dimopoulos）・ジョージャイと坂井典佑らによって，ゲージ階層性の問題を解決するために超対称性を取り入れるべきだと提案され，実際に**超対称大統一理論**の例として最小 $SU(5)$ 模型が構成された[2]．その後，超対称性を取り入れた統一模型という考え方は多くの研究者の研究によって著しい発展を遂げた．その結果，種々の大統一ゲージ群の考察，超対称性の破れ，重力相互作用との関わりなど，様々の側面が解明された．

近年の高エネルギー精密実験の発展は目ざましく，たとえば 10 年前に比して，結合定数の測定精度は桁違いに向上した．この結果，10 年以上前から期待されていた通り，大統一理論のエネルギースケールそのものに到達しなくても，低エネルギーでの予言を精密にテストすることで，いろいろな模型の良し悪しを判定することが可能となった．提案された当時の実験データでは，超対称性を持たない最小 $SU(5)$ 模型は誤差の範囲内で相当よい一致を示していたが，改善された近年の実験データによると，3 つの有効結合定数は一点で交わらないことがはっきりと分かる．これに対して，超対称性を取り入れると有効結合定数の走り方が異なる．超対称性を取り入れた最小 $SU(5)$ 模型で，有効結合定数を低エネルギーから高エネルギーへ走らせてみると，見事に高エネルギーで 3 つの結合定数が一致することが実験で確かめられた．このように，近年の実験事実は間接的ではあるが，最も簡単な超対称模型を強く支持している．

超対称理論では，粒子の質量はしばしば超ポテンシャルという量の中に登場する．場の量子論で量子効果を求めてみると，ボース粒子とフェルミ粒子は統計性の違いから，一般に逆符号で寄与する．超対称性は，ボース粒子とフェルミ粒子の間の対称性であるため，摂動論でどこまで計算しても，決して超ポテンシャル中の質量項が量子補正によって新たに生じないことが証明できる（**非繰り込み定理**）．したがって，超対称な理論の質量には，高エネルギーの基本理論パラメターが直接反映する．

現象論的な制限に合格するような超対称統一理論の模型は実際に構成できる．しかし，これでなければならないという必然性と説得力のある模型を構成するためには，超対称性の破れを理解することが重要な課題である．そのためには，**非摂動効果**がやはり重要となる．超対称理論の非摂動効果の理解は徐々に進んでいる．対称性などを駆使することにより，むしろ，超対称性のない理論に比して，より厳密な結論が出せる場合が多い．

超対称性を取り入れると，ヒッグス場のポテンシャルの中の 4 次の係数を与えるパラメター λ がゲージ結合定数の 2 乗で与えられる．一方，超対称性の破れがあっても，破れは質量次元を持つパラメターでのみ起こるから，ヒッグス粒子の質量には制限が付く．この予言によると，現在建設中の加速器での実験によってヒッグス粒子のうちの最も軽いものは必ず見つからねばならない．したがって，遠くない将来，ヒッグス粒子が発見されることが期待される．

7. 超弦理論における質量

重力も含めて力をすべて統一しようとする場合，**超弦理論**は最も有力な候補である．超弦理論では，弦の相互作用を表すパラメターはディラトンと呼ばれるスカラー場の真空期待値で与えられる．もしも非摂動効果が解明されて，ディラトンの真空期待値を決定することができれば，超弦理論は，弦の張力（広がり）を表すパラメターだけで記述される．これは質量次元を持つので，超弦理論で計算すると，すべての粒子の質量はディラトンの真空期待値の何倍という形で得られるはずである．これ以上パラメターの少ない理論はできないはずなので，その意味で超弦理論は究極の理論

と期待されている．

近年，ゲージ階層性の解として，余剰次元模型の可能性が注目されている．この考え方が再び力を得るようになったのは，超弦理論の発展が大きな契機となっている．超弦理論は10次元の時空で定義されるが，実際に我々が観測している時空は4次元である．したがって，残りの6次元空間は，我々の現在の観測にはかからないほど小さな空間に縮んでいるというのが通常の考え方である．しかし，コンパクトでない空間を考えることもできる．開いた弦は端が通常は開放端として振動する．しかし，論理的には端が固定された固定端の振動をすることも許される．このような場合，弦振動の固定端は全空間の部分空間をなし，通常は平面となる．この面のことを**D ブレーン**と呼ぶ[3]．D ブレーンは，超弦理論の非摂動効果を考えるにあたって，中心的な役割を果たしている．

上に見たように，ディラトンの真空期待値の決定を初めとして，超弦理論から物理的帰結を得るためには，**超弦理論の非摂動効果**の理解がたいへん重要である．弦理論の特異な性質として，コンパクト化の半径がたいへん小さい弦理論とたいへん大きな半径の弦理論とが実は同じものであるという事実が以前から分かっていた．さらに，強結合の弦理論と弱結合の弦理論との間に関係があることも近年分かってきた．これらの性質を総称して**双対性**と呼んでいる．さらに最近の発展として，いくつかの異なる超弦理論として知られていたものが実は同一の理論の異なる側面を見ていただけである可能性が高いことも分かってきた．これらすべての弦理論を包含する理論としてM理論と呼ばれる理論が考えられている．こうした発展から，超弦理論の非摂動効果の理解が進展している．

さらに，このD ブレーン上の低エネルギー有効理論を作ると，超対称ゲージ理論が得られる．すなわち，実際に，ゲージ粒子やスカラー粒子とその超対称なパートナーであるフェルミ粒子がD ブレーン上に閉じ込められている．これがブレーン・ワールドという考え方の大きな契機となったのである．また，この事実は，ゲージ理論の非摂動効果と超弦理論の非摂動効果との間に関係があることも示している．この関係を活用することによって，どちらの非摂動効果に対しても互いに有用な結果が得られる．一方，この事実は，行列模型を用いて，超弦理論の新たな非摂動的定式化を目指すためにも大いに活用されている．

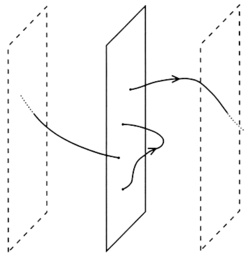


図3 開いた弦の固定端はD ブレーンとなる．開いた弦の長さが零になる極限で，質量零の粒子としてゲージ粒子などが現れる．

参考文献

1) 超対称性に関するテキストで代表的なものとしては J. Wess and J. Bagger, Supersymmetry and Supergravity, Princeton University Press (1992).
2) N. Sakai, *Z. f. Phys.* **C11** (1981) 153; S. Dimopoulos and H. Georgi, *Nucl. Phys.* **B193** (1981) 150; E. Witten, *Nucl. Phys.* **B188** (1981) 513.
3) 超弦理論に関するテキストで代表的なものとしては J. Polchinski, String theory I and II, Cambridge University Press (1998).
4) N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, *Phys. Lett.* **B429** (1998) 263; L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3370; *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 4690.

（さかい・のりすけ，東京工業大学理工学研究科）

バリオン質量の起源

QCDにおける質量と相互作用



初田 哲男

1. 宇宙のバリオン密度

現代物理学の中心課題の一つは，宇宙の物質・エネルギーの総量とその起源を探ることである．最近の観測データは，宇宙の全エネルギー密度が，宇宙を平坦にする臨界密度を単位として 1 に近いことを示唆している（$\Omega_{\rm tot} \sim 1$）[1]．さらにその内訳を $\Omega_{\rm tot} = \Omega_{\rm B} + \Omega_{\rm DM} + \Omega_{\Lambda}$ のように分割すれば，バリオン成分（$\Omega_{\rm B}$）はビッグバン元素合成の議論から 3 ～ 5% のレベルにとどまる一方で，非バリオン暗黒物質（$\Omega_{\rm DM} \sim 0.3$）や暗黒エネルギー（$\Omega_{\Lambda} \sim 0.7$）が大きな割合を占めることが示唆されている．

このように，バリオン（陽子や中性子などクォーク 3 つからなる複合粒子）は，宇宙全体のエネルギー密度の主要部分とは言えず，宇宙全体で平均すれば，$\rho_{\rm B} = (3\text{–}4) \times 10^{-31}\,{\rm g/cm^3}$ という微小な量となる．にもかかわらず，星のバリオン密度は，地球の平均で $5.5\,{\rm g/cm^3}$，太陽中心で約 $10^2\,{\rm g/cm^3}$，そして中性子星中心部では $10^{15}{\rm g/cm^3}$ にものぼる．これは，もともとバリオンが大きな質量を持ち，重力相互作用で集められるからであり，星は宇宙におけるバリオンの集積所と言うことができる．

では，そもそもバリオンはどうして大きな質量を持つのか？ この問は，真空の量子論的構造とも関係した深い物理的内容を含んでいる．以下では，クォークとグルオンの力学である量子色力学の観点からバリオン質量の起源について解説する．

2. クォーク質量 vs バリオン質量

現在，陽子質量（$M_{\rm p}$）と中性子質量（$M_{\rm n}$）は高い精度で測定されている[2]：

$$M_{\rm p} = 938.271998 \pm 0.000038 \text{ MeV}, \tag{1}$$

$$M_{\rm n} = 939.565330 \pm 0.000038 \text{ MeV}. \tag{2}$$

これらは電子の質量 $m_{\rm e}$（$=0.510998902 \pm 0.000000021$ MeV）の約 2000 倍であり，原子や原子核の質量の大部分を占めている．

陽子や中性子は，アップクォーク（u）とダウンクォーク（d）と呼ばれる“軽い”クォークからできている．そして，u, d クォークの質量は，

$$m_{\rm u} = 1.5 \sim 4.5 \text{ MeV}, \tag{3}$$

$$m_{\rm d} = 5.0 \sim 8.5 \text{ MeV}, \tag{4}$$

と見積もられている[*1)]．

図 1 の白い領域が，現在 u, d クォーク質量に対して許される範囲であり，その上限は 10 MeV を越えないことが見てとれる．素粒子の標準理論では，この小さいクォーク質量は，真空に凝縮しているヒッグス粒子によりもたらされると考えられている．

さて，(2) 式と (4) 式を比較すれば明らかなように，uud からなる陽子や ddu からなる中性子の質量の 98%以上は，u, d クォーク自身の質量以外に由来する．原子や原子核は，“全質量 = (構成粒子の質量和) + (小さい結合エネルギー)”と表せる非相対論的結合系であるが，バリオンはこれと正反対に，構成粒子の相互作用エネルギーや運動エネルギーがその質量より

*1) クォークを単離してその質量を測定することはできない（クォークの閉じ込め現象）．したがって，ここでの質量は，量子色力学の基礎方程式中の質量項を特徴付けるパラメーターを指す．この質量パラメーターは，量子揺らぎのために，エネルギースケール κ の関数となる．(4) 式は，$\overline{\rm MS}$-scheme と呼ばれる繰り込み処方を使った $\kappa = 2\,{\rm GeV}$ での値である．

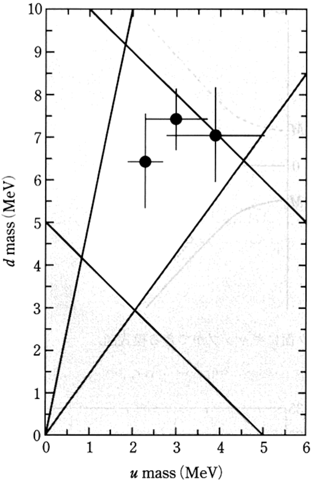


図 1　u, d クォークの質量に対する様々な制限[2]．白い領域が許される範囲を示している．誤差棒つきの点は，(4) 式を導出するのに用いられた QCD 和則と呼ばれる方法で得られた結果．

圧倒的に大きい相対論的結合系なのである[*2]．

3. 量子色力学

南部陽一郎によって初めて導入された[4] 量子色力学 (Quantum Chromo Dynamics, QCD) は，以下の作用で与えられる：

$$S_{\mathrm{QCD}} = \int d^4x \left[\sum_{q=u,d,\cdots} \bar{q}(i\gamma\cdot D - m_q)q - \frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_a \right]. \tag{5}$$

ここで，q はクォーク場，$G^a_{\mu\nu}$ はグルオン場の強さを表すテンソル，m_q はクォーク質量，$D_\mu = \partial_\mu + igt^a A^a_\mu$ は共変微分，g はクォーク–グルオンの結合定数，t^a $(a = 1 \sim 8)$ はカラー $SU_c(3)$ の生成子である．$q(x)$ は $SU_c(3)$ の 3 重項 (r, b, g) に属し，$A^a_\mu(x)$ は 8 重項に属する．グルオンはそれ自身でカラーを持ち，クォークとだけでなく自分自身とも相互作用する点が，光子と大きく異なる．

4. スケール異常とバリオン質量

(5) 式で与えられる QCD 作用は，ローレンツ変換と局所的カラーゲージ変換の下で不変である．更に，$m_q = 0$ の場合には，大局的カイラル変換とスケール変換の下でも不変となる．しかし，これらの対称性は，量子効果や温度・密度の効果で，陽に破れたり自発的に破れることがある．

スケール変換（長さやエネルギーのスケールを変える変換）に対する S_{QCD} の不変性が量子効果で破れる現象は，スケール異常と呼ばれる．その解析から，陽子質量について以下の関係式を導くことができる[5]：

$$M_{\mathrm{p}} = \langle \mathrm{p} | \left[\frac{\beta}{2g} G^2 + m_q(1+\gamma_m)\bar{q}q \right] | \mathrm{p} \rangle. \tag{6}$$

ここで，β, γ_m は g の関数で，QCD の結合定数 g と m_q がスケール変換の下でそれぞれどう変化するかを特徴付ける量である．また，$|\mathrm{p}\rangle$ は，静止した陽子を表す状態ベクトルである．

$m_{\mathrm{u,d}}$ に直接関係する (6) 式の右辺第二項は，π 中間子と陽子の低エネルギー散乱実験のデータから，陽子質量の高々 10%程度であることがわかっている[*3]．これは，陽子質量の大部分が $m_{\mathrm{u,d}}$ とは無関係に決まっていることを端的に示している．右辺第一項は，グルオン場の行列要素で書かれているが，これをクォーク–グルオンの運動エネルギーと相互作用エネルギーに更に分解することもできる[6]．

5. 動的クォーク質量とバリオン質量

QCD は，紫外漸近自由性という性質を持ち，真空偏極の効果を考慮したクォーク・グルオンの有効結合定数 g が，高エネルギー（低エネルギー）で小さく（大きく）なる．これは，QCD 真空の誘電定数 ϵ_{vac} が 1

*2)　中性子が陽子よりわずかに重い $(M_{\mathrm{n}} - M_{\mathrm{p}} \simeq 1.3\,\mathrm{MeV})$ のも興味深い[3]．これは，d–u の質量差（中性子をより重くする傾向にある）と自己電磁質量（陽子を重くする傾向にある）の微妙なバランスの結果として理解できる．もし，d–u の質量差がもう少し小さくて，陽子が中性子より重かったら，宇宙はどんなふうであろうか？ そこでは，陽子は中性子に崩壊し，水素原子は存在しない…

*3)　重いクォークについては，右辺第二項は，第一項の一部と合わさって消えてしまうことが $1/m_q$ の展開で示せるので，考えなくてよい[5]．

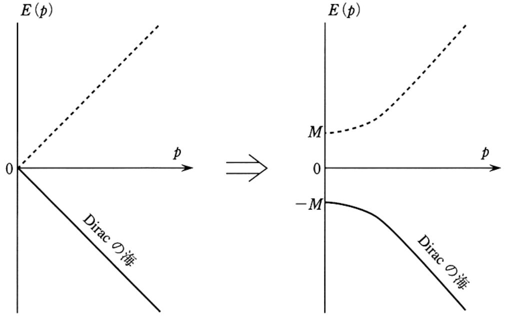


図 2　クォーク–反クォーク対の凝縮でディラック面にギャップができる模式図.

より小さく，真空が反誘電性媒質であるということと関係している[7].

低エネルギーでクォーク–グルオン結合が強くなるという性質のために，たとえ $m_q = 0$ であっても，クォークが低エネルギーで伝播すると大きな動的質量を獲得する．この質量獲得の機構は，金属の超伝導との類推で以下のように理解できる[8].

超伝導の BCS 理論では，フェルミ面付近の電子対が格子振動による引力を介して凝縮し，超伝導状態が実現する．またそれと同時に，フェルミ面上の 1 電子励起が有限のエネルギーギャップを持つ．

QCD 真空では，正エネルギー状態と負エネルギー状態（ディラックの海）の境であるディラック面近傍で同様の現象が起こる．そこでは，クォークと反クォークがグルオンによる引力を介して凝縮し，真空が一種の超伝導状態になる．クォークがこの凝縮中を伝播すると，凝縮からの“抵抗”を受けて動的質量を獲得し，ディラック面にギャップができるのである（図 2 を参照).

u, d クォークの場合，凝縮前の質量 $m_{\rm u,d}$ は (4) 式のように 10 MeV 以下であるのに対して，凝縮後は $M_{\rm u,d} \sim 300\,{\rm MeV}$ という大きな質量が生まれる[5]．注意すべきは，$m_q = 0$ でも $M_q \neq 0$ となることである．

図 3 には，QCD の第 1 原理計算（格子 QCD 数値シミュレーションと呼ばれる：本特集の岩崎氏の解説参照）で求められたクォークの動的質量 M が，4 次元ユークリッド運動量 p の関数として示されている[9]．低エネルギー（$p \sim 0$）で，ほぼ 300 MeV の動的質量が生成されていることがこの図から見てとれる．ミクロに見れば，この動的質量は，もともとのクォークのまわりにまとわりつく無数のクォークとグルオンの“雲”によってもたらされると言ってもよい．

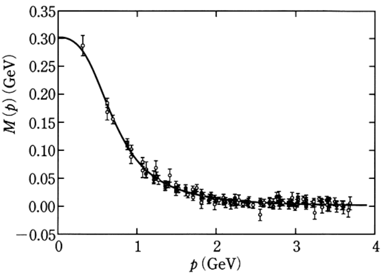


図 3　格子 QCD 数値シミュレーションによるクォークの動的質量とその 4 次元ユークリッド運動量 p に対する依存性[9].

ひとたび，クォークの動的質量が生成されれば，陽子や中性子の質量は，まずは $M_{\rm u,d}$ の 3 倍（＋構成子クォーク間の残留相互作用）と考えてよい：

$$M_{\rm p,n} \simeq 3M_{\rm u,d} \sim 10^3\,{\rm MeV}. \qquad (7)$$

歴史的には，QCD の確立以前から，300 MeV 程度の“構成子質量”（この値は，バリオンの磁気能率を再現するように決められていた）を仮定した“構成子クォーク模型”が研究され，現象論的な成功を収めてきた[12]．もし，構成子質量が QCD におけるクォークの動的質量に他ならないとすれば，この模型が QCD の良い近似になっていることも肯ける．図 4 には，バリオンに

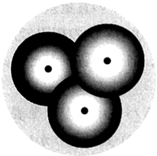


図 4　構成子クォーク模型におけるバリオンの模式図．QCD 作用に現れる $m_{\mathrm{u,d}}$ なる質量を持つ軽いクォーク（カレントクォークと呼ばれる）を小さい黒丸で，動的質量を獲得して重くなった構成子クォークを大きな 3 つの丸で表してある．

ついての構成子クォーク模型の概念図を示してある．

6. カイラル対称性とクォークの動的質量

クォークの動的質量の生成は，カイラル対称性の自発的破れという QCD 真空の構造とも密接に関係している．(5) 式の QCD 作用におけるクォークの質量項は，

$$m_q\bar{q}q = m_q(\bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L) \tag{8}$$

のように，カイラリティ演算子 γ_5 の固有ベクトル $q_L(=-\gamma_5 q_L)$ と $q_R(=\gamma_5 q_R)$ を用いて，q_L と q_R の積で表されている．

もし，この質量項がなければ，QCD 作用は，q_L と q_R の独立な回転に対応する大局的カイラル対称性 $SU_L(N_f)\otimes SU_R(N_f)$ を持つ（N_f はクォークの種類（フレーバー）数を表す．以下では主として u, d を考えるので，$N_f=2$ ととる）．クォーク場はカイラル変換の下で以下のように変換する：

$$\delta_{L+R}q = i\tau^a q, \quad \delta_{L-R}q = i\tau^a\gamma_5 q. \tag{9}$$

ここで，δ_{L+R} (δ_{L-R}) は，q_L と q_R を同方向（逆方向）に回転する微小変換であり，τ^a はパウリ行列で，$SU(N_f=2)$ の生成子である．

前節で議論したように，たとえ $m_q=0$ であっても，クォークは動的質量 M_q を獲得する．これは，QCD 作用が持っていたカイラル対称性が，QCD 真空（QCD の基底状態）で保持されず，

$$SU_L(N_f)\otimes SU_R(N_f) \to SU_{L+R}(N_f) \tag{10}$$

なる対称性の自発的破れが起こっていることを意味する．

このカイラル対称性の自発的破れを特徴付ける秩序変数（オーダーパラメーター）は，前節で議論したクォーク–反クォーク対凝縮（以後カイラル凝縮と呼ぶ）で，$\langle 0|\bar{q}q|0\rangle = \langle 0|\bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L|0\rangle$ と表せる．その大きさは，QCD の様々な解析から

$$\langle 0|\bar{q}q|0\rangle \simeq -(250\ \mathrm{MeV})^3 \tag{11}$$

と見積もられている*4)．

カイラル凝縮の存在は，$q_L \leftrightarrow q_R$ なる遷移が真空中で頻繁に起こり，それを反映して大きな動的質量項 $M_q\bar{q}q = M_q(\bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L)$ が生成されることを意味する．また，π 中間子は，カイラル対称性の自発的破れに伴う南部–ゴールドストーン粒子と同定される．実際，π 中間子の質量 m_π についてゲルマン–オークス–レナー（Gell-Mann–Oakes–Renner）関係式，

$$m_\pi^2 = -\frac{m_q}{f_\pi^2}\langle 0|\bar{q}q|0\rangle + O(m_q^2) \tag{12}$$

が一般的に導かれる．ここで，f_π（$\simeq 93\,\mathrm{MeV}$）は，π 中間子のレプトンへの崩壊定数である．(12) 式は，$m_q \to 0$ の極限（カイラル極限と呼ばれる）で，π 中間子がゼロ質量となることを示している．

7. ミラー表現とバリオン質量

さて，バリオン質量と前節のカイラル凝縮はどのように関係しているのであろうか？ 最も単純な考え方は，陽子や中性子の場（N）がカイラル変換の下でクォークと同じ変換性を持つとするものである[10)]：

$$\delta_{L+R}N = i\tau^a N, \quad \delta_{L-R}N = i\tau^a\gamma_5 N. \tag{13}$$

この立場をとって，QCD 和則と呼ばれる解析方法を適用すると，ヨッフェ（Ioffe）関係式と呼ばれる近似式が得られる[11)]：

$$M_{\mathrm{p}} \simeq \left[-2(2\pi)^2\langle 0|\bar{q}q|0\rangle\right]^{1/3} \sim 10^3\ \mathrm{MeV}. \tag{14}$$

これは，バリオンの質量が，カイラル凝縮から直接生成されていることを端的に述べており，“バリオンは 3 つの構成子クォークからなり，その各々の質量はカイラル凝縮により誘導されている”という描像とも合致する．

しかしながら，事情はそれほど単純でないことが最

*4)　これも $\kappa = 2\,\mathrm{GeV}$ での値である：(4) 式の脚注参照．

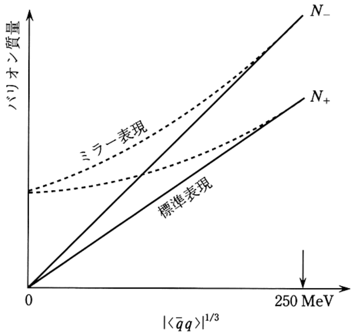


図 5　標準表現（実線）とミラー表現（破線）における正パリティバリオン（N_+）と負パリティバリオン（N_-）の $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle$ 依存性.

近わかってきた．その理由は，バリオンが複合系であり，常に励起状態を持つという点に起因する．例えば，正パリティを持つ陽子・中性子には，同じスピン・アイソスピンだが負パリティの励起状態が存在する．このようなパリティパートナーは，陽子・中性子に限らず，他のバリオンでも一様に観測されており，いずれも正パリティの基底状態から約 500 MeV だけエネルギーの高いところに負パリティ状態がある（これに反して，クォーク自身に励起状態は観測されていない）.

さて，前者を N_+，後者を N_- と呼ぶと，それらが以下のように変換する 2 種類のフェルミオン場 $N_i (i = 1, 2)$ の線形結合として表せることが，DeTar–国広によって指摘された[13]：

$$\delta_{L+R} N_i = i\tau^a N_i, \; \delta_{L-R} N_i = i\eta\tau^a\gamma_5 N_i. \tag{15}$$

ここで $\eta = +1 (i = 1), -1 (i = 2)$ である．この可能性は，慈道–岡–保坂により詳細に研究され，カイラル対称性のミラー表現と名付けられた[14].

バリオン質量の観点からは，(13) 式で与えられるような標準表現と，(15) 式のミラー表現は本質的な違いを持つ．標準表現では，ヨッフェ関係式 (14) で見たように，バリオン質量自体がカイラル凝縮で決まっている．言い換えれば，すべてのバリオンは，$\langle 0|\bar{q}q|0\rangle \to 0$ の極限でゼロ質量に縮退する（図 5 の実線）.

一方，ミラー表現では，$\bar{N}_1 N_2$ のようなカイラル不変なバリオン質量項が許されるので，$\langle 0|\bar{q}q|0\rangle$ は，正パリティと負パリティの質量差のみに寄与する．言い換えれば，$\langle 0|\bar{q}q|0\rangle \to 0$ の極限で，N_+ と N_- の質量は縮退するが，各々の質量がゼロになる必要はない（図 5 の破線）.

QCD におけるバリオンが標準表現 (13) 式に従うか，ミラー表現 (15) 式に従うかは未だ明らかでなく，この解明に向けて，格子 QCD 数値シミュレーションや様々なハドロン反応過程の研究が進行中である[14, 15].

8. スカーミオンとバリオン質量

前節までは，バリオンをクォーク 3 つで構成される複合系と見てきた．これは，高エネルギー極限（短波長極限）の素励起としてのカレントクォークから出発して，いかにバリオン質量が生まれるかを考察するトップダウンの見方であった.

では反対に，低エネルギー極限（長波長極限）の素励起である π 中間子を基に，ボトムアップでバリオンを構成したらどうなるであろうか？ そもそもスピン 0 のボーズ粒子である π 中間子からスピン 1/2 のフェルミ粒子である陽子を作れるのだろうか？

核物理学者スカーム（T.H.R. Skyrme）は，これが可能であることを，QCD が提唱される以前の 1950 年代後半から 1960 年代初頭の一連の論文で示した[16]．現在，彼の考え方は原子核・素粒子物理だけでなく，物性物理にも応用されている[17]．スカームがこの問題を考えたもともとの動機は，原子核を中間子の量子流体と考え，陽子や中性子はその量子流体中を運動する一種の “渦” として記述することであったようだ.

ここで出発点となるのは，非線形 σ 模型（QCD の低エネルギー有効理論）の一種であるスカームラグランジアンである：

$$\mathcal{L}_{\rm sk} = \frac{f_\pi^2}{4}{\rm Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + \frac{1}{32 e_{\rm sk}^2}{\rm Tr}[\partial_\mu U U^\dagger, \partial_\nu U U^\dagger]^2. \tag{16}$$

$U(x)$ は π 中間子場を表し，$N_f = 2$ では $SU(2)$ の元となる．また，$e_{\rm sk}$ は無次元のパラメーターである．$U(x)$ は，実空間で無限遠点を同一視して得られる 3 次元球 S^3 から，$SU(2)$ のパラメーター空間 S^3 への写像になっている．この写像が，整数で特徴付けられる “巻き数” を持つこと（$\pi_3(S^3) = Z$）を反映して，位相的な保存量が定義され，それがバリオン数 B に同定される.



図 6 スカーミオンに対応するヨーロッパ産はりねずみ[19]．

$\mathcal{L}_{\rm sk}$ は，各バリオン数に対して，位相的にも動的にも安定なソリトン解（スカーミオン）を持つ．このソリトン解は，

$$U(\vec{r}) = \exp\left(i r^a \tau^a F(r)\right) \tag{17}$$

のように空間ベクトルとアイソスピンベクトルがそろった形（スピン・フレーバー・ロッキング，SFL）をしているので，はりねずみ（hedgehog）解とも呼ばれる（図 6 参照）．更に，この解を集団座標の方法を用いて量子化することで，スカーミオンが半整数スピンを持てることが示せる[18]．パラメーター $e_{\rm sk}$ を適当に選ぶことで，この量子化されたソリトンが，陽子・中性子やその励起状態の様々な性質を 30%程度の誤差で再現できることもわかっている[20]．

古典ソリトン解のエネルギー $M_{\rm B}$（この正確な値は数値的に求められる）には以下のような下限がある：

$$M_{\rm B} \geq \frac{6\pi^2 f_\pi}{e_{\rm sk}} |B|. \tag{18}$$

つまり，バリオンの質量は，π 中間子同士の相互作用を表す 2 つの結合定数 f_π と $e_{\rm sk}$ で決まっており，バリオン数が増えるほど大きくなる．

スカーミオンによる記述とクォークによる記述は，バリオンという一つの物理的実態を低波長極限と高波長極限という異なる側面から見たものであり，カイラル対称性の自発的破れを通して背後では繋がっている．この繋がりを具現するような，ハイブリッド模型を構築することもできる．このような模型では，童話“不思議の国のアリス”で，にやにや笑いを残しながら消えてゆくチェシャ猫のように，低波長に近づくにつれバリオン数という残像を残しながら消えてゆくクォークの姿を記述できる[21]．このような現象を，チェシャ猫原理（Cheshire cat principle），または（もう少し真面目に）partial bosonization と呼ぶことがある．

9. 格子 QCD 第 1 原理計算とバリオン質量

ここまで，バリオン質量の起源についての様々な角度からのアプローチを見てきた．すでに強調したように原子や原子核のような非相対論的結合系と異なり，バリオンを QCD 作用の基本変数である軽いカレントクォークから組み立てようとすると，極度に相対論的でかつ量子効果の大きい系を扱わねばならない．格子 QCD の第 1 原理計算は，モンテカルロ法を用いて，ゲージ不変性を保持したまま，この課題を達成する方法の一つで，近年大きな進展を見ている．このアプローチについては，本特集の岩崎氏の解説を参照していただきたい．

10. 高温・高バリオン密度でのカイラル対称性

ビッグバン直後，宇宙年齢が $10^{-(4\sim5)}$ 秒ころに実現していた高温状態や，中性子星の中心部の高バリオン密度状態では，真空中で自発的に破れていたカイラル対称性が回復し，重かったバリオン質量がカレントクォーク質量のレベルにまで激減するかもしれない．更にもっと高温・高バリオン密度では，バリオン自体が溶解して存在できなくなるだろう[22]．

有限温度密度の媒質中で，カイラル対称性がどのように実現されているかは，熱力学的期待値としてのカイラル凝縮 $\langle\bar{q}q\rangle$ を用いて判断できる．図 7 は $m_q = 0$ で $N_f = 2$ における QCD の相構造の模式図である．縦軸は温度（T），横軸はバリオン化学ポテンシャル（$\mu_{\rm B}$）を示している．$\mu_{\rm B} = 0$（縦軸上）では，$T \simeq 170\,{\rm MeV}$ で 2 次相転移を示すことが QCD の第 1 原理計算や繰り込み群を用いた解析でほぼ確立している[23]．一方 $T = 0$（横軸上）では，原子核密度の数倍から 10 倍に対応する化学ポテンシャルで 1 次相転移を示すことが様々なモデル計算で示唆されている．

一般の温度や密度では，低密度側の 2 次相転移線（図 7 の点線）と，高密度側の 1 次相転移線（図 7 の実線）が，3 重臨界点（tricritical point, TCP）で繋がっているという証拠がある[24]．この臨界線の内側が，カイラル対称性の自発的に破れた相，外側は回復した相であり，臨界線近傍ではバリオンの性質やそれに関係した物理量が大きく変化すると考えられる[25]．カイラル対称性の回復に関連する諸問題は，現在アメリカで

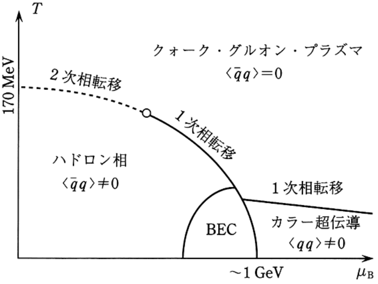


図7　$N_f = 2$ で $m_q = 0$ の場合の，有限温度・バリオン密度における QCD の相図．様々な理論的解析に基づく現段階での予想図で，今後，相境界線の修正や新たな相の発見があるかもしれない．

稼動中の相対論的重イオン衝突型加速器（Relativisitic Heavy Ion Collider, RHIC）を用いた研究の中心テーマの一つとなっている[28]．

図 7 における高バリオン密度側の 1 次相転移線を越えた領域には，カラーゲージ対称性 $SU_c(3)$ が自発的に破れたカラー超伝導（color super conductivity, CSC）相が拡がっていると予想されている[26,27]．この相を特徴付ける秩序変数は $\langle qq\rangle$ なるクォーク対凝縮である．その具体形と対称性の破れのパターンは，$N_f = 2$ では，

$$\langle q^a_\alpha C\gamma_5 q^b_\beta\rangle = \epsilon^{ab3}\epsilon_{\alpha\beta 3}\Delta_2, \tag{19}$$

$$SU_c(3) \to SU_c(2), \tag{20}$$

また $N_f = 3$ では，

$$\langle q^a_\alpha C\gamma_5 q^b_\beta\rangle = (\delta^a_\alpha\delta^b_\beta - \delta^b_\alpha\delta^a_\beta)\Delta_3, \tag{21}$$

$$SU_c(3)\otimes SU_L(3)\otimes SU_R(3) \to SU_{c+L+R}(3) \tag{22}$$

となる．ここで，α, β はカラー自由度を，a, b はフレーバー自由度を表し，$\Delta_{2,3}$ は，クォークが作るフェルミ面上でのギャップに対応している．

$N_f = 3$ の場合に特に興味深いのは，(22) 式のようにカラーとフレーバーが絡み合った対称性の破れが現れ（カラー・フレーバー・ロッキング，CFL)，$\langle\bar{q}q\rangle = 0$ であるにもかかわらずカイラル対称性が破れるという点である．

低密度で我々が知る陽子・中性子・ハイペロンなどのバリオンと，カラー超伝導相におけるバリオン的励起との関係は？ カラー超伝導相にスカーミオンは存在するか？ 1 次相転移線の内側で予想される π 中間子や K 中間子のボーズ・アインシュタイン凝縮相（図 7 で BEC と記された領域）と，カラー超伝導相における中間子凝縮の関係は？ などなど，高バリオン密度の物理には未解決の問題が多い．

11. おわりに

この小文では，星の主成分であるバリオンがどのような機構で質量を獲得しているのか，について解説した．

陽子や中性子の質量は，ヒッグス機構で生成されたクォーク質量（m_q）からは説明できず，むしろ，QCD 真空の構造と相互規定的に生まれていることを見た．特に，(i) カイラル対称性の自発的破れ，(ii) クォークの動的質量 M_q の生成，(iii) π 中間子の存在とスカーミオン，がバリオン質量の起源についての基本的概念となっている．

しかしながら，励起状態まで含めたバリオン質量の統一的理解はいまだ道半ばである．ミラー表現の可能性はそこへの糸口を与えているかもしれない．

宇宙初期や中性子星中心部のような極限状態で起こるカイラル対称相への相転移に伴って，バリオン質量がどのような運命をたどるのかという問題は，理論・実験両面から活発な研究が始まっている．バリオン構造の研究は，無限個のクォーク・グルオンからなる真空やその相転移と切り離しては考えられないのである．

QCD から見たバリオンの様々な側面についてより深く知りたい読者は，最近の教科書[29]を参照していただきたい．

参考文献

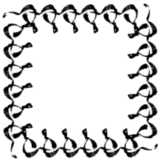
1) 「素粒子的宇宙論の新展開—ミクロとマクロの新パラダイムへ」，数理科学 2003 年 2 月号．
2) K. Hagiwara et al., The Review of Particle Properties, *Phys. Rev.* **D66**, 010001 (2002); http://pdg.lbl.gov.
3) T. Hatsuda, *Nucl. Phys.* **A577**, 361 (1994).
4) Y. Nambu, in Preludes in Theoretical Physics, in honor of V.F. Weisskopf (North-Holland, Amsterdam, 1966). この論文は，Broken Symmetry, Selected Papers of Y. Nambu, eds. T. Eguchi and K. Nishijima (World Scientific, Singapore, 1995) pp.192–201 にも収録されている．
5) T. Hatsuda and T. Kunihiro, *Phys. Rept.* **247**, 221 (1994).
6) X-D. Ji, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1071 (1995).

7) F. Wilczek, Asymptotic Freedom, hep-th/9609099.
8) Y. Nambu, G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122** (1961).
9) P.O. Bowman, Urs M. Heller and A.G. Williams, *Phys. Rev.* **D66** 014505 (2002).
10) M. Gell-Mann and M Levy, *Nuovo Cim.* **16**, 705 (1960).
11) L.J. Reinders, H. Rubinstein and S. Yazaki, *Phys. Rept.* **127**, 1 (1985).
12) H.J. Lipkin, *Phys. Rept.* **8**, 173 (1973).
13) C. DeTar and T. Kunihiro, *Phys. Rev.* **D39**, 2805 (1989).
14) D. Jido, M. Oka and A. Hosaka, *Prog. Theor. Phys.* **106**, 873 (2001).
15) S. Sasaki, T. Blum and S. Ohta, *Phys. Rev.* **D65**, 074503 (2002).
16) Selected Papers with Commentary of T.H.R. Skyrme, ed. G.E. Brown (World Scientific, Singapore, 1994).
17) Geometric Phases in Physics, eds. A. Shapere and F. Wilczek (World Scientific, Singapore, 1989).
18) スカーミオンが半整数スピンを持つことのわかり易い解説は，I.J.R. Aitchison, 文献 17) の pp.380–408.
19) C.W. Wong, in Chiral Solitons, ed. K-F. Liu, (World Scientific, Singapore, 1987).
20) G.S. Adkins, C.R. Nappi and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B228**, 552 (1983). H. Yabu and K. Ando, *Nucl. Phys.* **B301**, 601 (1988).
21) H.B, Nielsen, in Skyrmions and Anomalies, eds. M. Jezabek and M. Praszatowicz (World Scientific, Singapore, 1987) p.531.
22) 「物質とは何か—クォークがひらく新しい物質観」，数理科学 2001 年 3 月号.
23) F. Karsch, *Lecture Notes in Physics*, **583**, 209 (2002).
24) Z. Fodor and S.D. Katz, *JHEP* **0203**, 014 (2002).
25) M. Asakawa, U.W. Heinz and B. Muller, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2072 (2000). Y. Hatta and T. Ikeda, *Phys. Rev.* **D67**, 014028 (2003).
26) K. Rajagopal and F. Wilczek, in At the Frontier of Particle Physics – Handbook of QCD, ed. M. Shifman (World Scientific, Singapore, 2001).
27) 飯田　圭,「カラー超伝導」, 日本物理学会誌, vol.12 (2002).
28) 現在稼動中の RHIC の詳細については，http://www.bnl.gov/rhic/.
29) A. Hosaka and H. Toki, Quarks, Baryons and Chiral Symmetry, (World Scientific, Singapore, 2001).

（はつだ・てつお，東京大学大学院理学系研究科）

ニュートリノの質量*)

小さな質量とその起源



荒船 次郎

1. はじめに—名前について

ニュートリノは 1930 年にパウリが予言した素粒子で，質量が極めて軽く，そして，まるで小さな透明な粒子のように感知され難く，物質中をほとんど衝突せずに通り抜ける．

ニュートリノ（中性微子）は，電気的に中性（ニュートラル）で，しかし質量の重いニュートロンよりはるかに軽く，イタリア語で微小を意味する接尾語（イーノ）がついている．ニュートリノは，質量も小さいが，衝突する半径も小さいので，2 重に小さく，フェルミが 1933 年につけたこの名がぴったりだ．通常，ギリシャ文字ニュー ν で，また，反粒子である反ニュートリノを $\bar{\nu}$ で表す．

さらに，ニュートリノを姓とすれば名に相当して，3 つの世代名，電子ニュートリノ（ν_e），ミューオンニュートリノ（ν_μ），タウオンニュートリノ（ν_τ）がある．それらは，ニュートリノが物質と衝突して電荷を得るとき，それぞれ，電子（e），ミューオン（μ），タウオン（τ），のどれになるかの性質に応じて命名されている．弱い相互作用をする軽いニュートリノはこの 3 種類しかない．

2. ニュートリノ質量差と混合

2.1 混合とは

ニュートリノの質量は大変軽いが，果たしてゼロか有限かという長年の謎は，1998 年にスーパーカミオカンデ（以下，SK と略す）による大気ニュートリノ振動の発見で決着がつき，質量があることになった．

ところで，前節の世代名がついたニュートリノ ν_α（$\alpha = e, \mu, \tau$）は質量が決まった状態ではない．質量の決まった状態を区別して，ν_j（$j = 1, 2, 3$）と表そう．ここでは簡単のため $m_3 - m_2 \gg m_2 - m_1 > 0$ と仮定して話をする．すると，ν_α（$\alpha = e, \mu, \tau$）は ν_j（$j = 1, 2, 3$）の「混合」した状態で，ユニタリー行列 U を用いて

$$\nu_\alpha = \sum_{j=1,2,3} U_{\alpha j} \nu_j$$

と表される．この混合行列 U は MNS 行列（牧，中川，坂田の頭文字）とも呼ばれるが，ここでは簡単のため U を実数行列と仮定し，$U = R(\theta_{23}) R(\theta_{13}) R(\theta_{12})$ と表しておく．ここに，$R(\theta_{ij})$ は i, j 面に垂直な回転軸の周りの大きさ θ_{ij} の回転行列である．

2.2 質量差と混合の観測

宇宙線が大気で作る「大気ニュートリノ」では ν_μ が ν_τ へ振動することが SK 実験で発見された．得られたおよその値は

$$m_3{}^2 - m_2{}^2 \approx 2.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{eV}^2,$$

$$\sin^2 2\theta_{\mathrm{taiki}} \approx 1$$

である．一方，「太陽ニュートリノ」では SK 実験，SNO 実験（カナダ），および「原子炉ニュートリノ」のカムランド実験（東北大学等）から，ν_e は他へ振動することが観測され

$$m_2{}^2 - m_1{}^2 \approx 0.69 \times 10^{-4}\,\mathrm{eV}^2,$$

$$\sin^2 2\theta_{\mathrm{taiyo}} \approx 0.86$$

である．また，原子炉実験（フランスの Chooz と米国の Palo Verde）により，$|\sin\theta_{13}|^2 < 0.04$ がわかったので，簡単のため，$\theta_{13} = 0$ とすれば，上の結果は $\theta_{23} = \theta_{\mathrm{taiki}}$，$\theta_{12} = \theta_{\mathrm{taiyo}}$ と関係がつけられる．

---

*) 文献引用を省かせていただく失礼をお許しいただきたい．

3. ニュートリノの質量の平均値の測定

3.1 素粒子または原子核実験

ニュートリノ振動の観測では質量の2乗の差は観測されるが，質量の平均値はわからない．加速器実験または原子核実験から現在与えられている質量の上限は次のようである．

$$m_{\nu_e} < 3\,\mathrm{eV}$$
（ベータ崩壊，$^3\mathrm{H} \to {}^3\mathrm{He} + e^- + \bar{\nu}_e$から），

$$m_{\nu_\mu} < 190\,\mathrm{KeV}$$
（パイ中間子崩壊，$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$から），

$$m_{\nu_\tau} < 18.2\,\mathrm{MeV}$$
（タウオン崩壊，$\tau^- \to \pi^- b\pi^- b\pi^+ \nu_\tau$から）．

3.2 2重ベータ崩壊（マヨラナ型の質量）

ゲルマニウム原子核 $^{76}\mathrm{Ge}$ は半減期 $T_{1/2} = 1.55 \times 10^{21}$ 年で2重ベータ崩壊，$^{76}\mathrm{Ge} \to {}^{76}\mathrm{Se} + 2e^- + 2\nu$，をするが，もしニュートリノと反ニュートリノが同じ粒子なら（この場合をマヨラナ粒子，反粒子と粒子が異なる場合をディラック粒子と呼ぶ），ニュートリノを出さない崩壊 $^{76}\mathrm{Ge} \to {}^{76}\mathrm{Se} + 2e^-$ が許され，これを $0\nu\beta\beta$ 崩壊と言う．$0\nu\beta\beta$ 崩壊の振幅はニュートリノの質量に比例するので，$0\nu\beta\beta$ 崩壊からニュートリノの質量がわかる．現在，およそ

$$m_\nu < 0.84\,\mathrm{eV}$$

の上限が得られている(詳しくは，$m_\nu = \left|\sum_j m_j e^{i\delta_j} U_{ej}^2\right|$)．ただ，$0\nu\beta\beta$ 崩壊を見つけたという報告があり $m_\nu = 0.39^{+0.17}_{-0.28}\,\mathrm{eV}$ という値を出しているが，まだ国際的な同意はない．将来計画には，質量を $2 \times 10^{-3}\,\mathrm{eV}$ まで見たいという野心的なもの（10 ton–GENIUS 計画）まであり，ニュートリノがマヨラナ粒子か否かの決着は将来に期待したい．また，加速器で作ったミューニュートリノを用いて，$\bar{\nu}_\mu \to \bar{\nu}_e$ および，$\nu_\mu \to \nu_e$ への振動が探索され，振動が見えたという米国の LSND 実験の報告がある．ニュートリノ質量の2乗の差は，$\delta m_\nu{}^2 = 0.5$–$2\,\mathrm{eV}^2$ と大きく，国際的な同意は得られていない．もしこれが正しければ，弱い相互作用はしないが第4番目のニュートリノがあることになる．米国の MiniBooNE 実験で近く決着がつくと期待される．

3.3 宇宙観測・宇宙論から見たニュートリノの質量

人工衛星 WMAP の電波観測器による宇宙背景放射の揺らぎの観測を，地上の光学望遠鏡による銀河分布密度の揺らぎの観測 2dFGRS とくらべることで，ニュートリノが小距離の密度揺らぎを消しすぎないよう

$$m_\nu < 0.23\,\mathrm{eV}$$

という上限が得られている．宇宙観測でどこまで精度が上がるか期待したい．

4. ニュートリノに小さな質量を与える理論

4.1 sea-saw 機構

最も簡明な理論は，柳田勉らの提唱した sea-saw 機構である．ニュートリノはマヨラナ粒子であると仮定する．すると，素粒子の標準模型の対称性を守る限り，標準模型の構成粒子を増やさずにニュートリノに質量を与えると，理論はくりこみ不可能になってしまう．対称性を守りつつも，くりこみ可能な最も単純な拡張は，構成粒子に新しく大変重いマヨラナ粒子のニュートリノ ν_M を導入することである．この粒子は標準模型の対称性の下で1次元表現に属する．この新粒子 ν_M と通常のニュートリノ ν_j およびヒグス場の湯川相互作用を仮定すると，例えばニュートリノ ν_1 は，$\nu_1 \to \nu_M \to \bar{\nu}_1$ という摂動論からマヨラナ質量，

$$m_1 = \frac{{f_1}^2 v^2}{M}$$

を得るのである．ここで，f_1 は湯川相互作用の結合定数，v はヒグス場の真空期待値，M は重いマヨラナ粒子の質量である．中間状態と初めの状態のエネルギー差が分母に現れるのは量子力学の特徴である．この模型では，ニュートリノ質量の小ささは，分母に現れるマヨラナ粒子の質量が大きいことが原因である．したがって，ニュートリノ質量が小さいほど，より高いエネルギーの未知の物理を反映し，ニュートリノ質量の研究が未知の物理の研究に繋がる．この模型は，ニュートリノの質量が軽い説明が自然なこと，および，宇宙のバリオン数の起源もマヨラナ粒子 ν_M の導入で説明できるという利点を持つ．しかし，ニュートリノ質量の大きさや MNS 混合行列を予言するには，さらに，具体的な仮定が必要になり，多くの理論が提案されている．3つのニュートリノに対しては，上の式の m, f,

M を行列として，$m = v^2 f^T M^{-1} f$ という対称な質量行列が得られる．この m を対角化する行列がMNS行列 U である．

ニュートリノ振動の観測の結果，U は，混合角3つのうち2つが大きく，残りの1つは小さいが，2つを最大値 $\theta_{23} = \theta_{12} = \pi/4$ にとり（bi–maximal と言う），かつ，残りの1つは $\theta_{13} = 0$ とすると，

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

というきれいな形になる．現実がなぜこれに近いか，そして，実際はこれから少しずれているのはなぜか，を説明するため，置換群の対称性や，新たな $U(1)$ 対称性，大きな群の導入など，新たな原理を求めることや，輻射補正のくりこみ群の適用など，研究が活発に行われている．

4.2 Zee 模型

この模型も，マヨラナ型を仮定する．標準模型の対称性の下で1次元表現のボゾンと2次元表現の新たなヒグス場を導入し，輻射補正を行うことでマヨラナ型の質量を生じる．bi–maximal な MNS 行列を導くには，さらに仮定が必要である．

4.3 ディラック型の質量

ニュートリノ質量が小さくても，ニュートリノがマヨラナ粒子であるとは限らない．ディラック型では粒子の自由度がマヨラナ粒子の場合より2倍あるが，余分な自由度のニュートリノは質量が小さければ宇宙で生成され難く，宇宙論とも矛盾しない．

ディラック型は，左右対称な模型には現れるが，他にも，超弦理論に基づく D–brane 理論の現象論として，通常の4次元時空の他にコンパクトな外次元空間がある時空の模型でも議論されている．通常の4次元時空に棲む通常の左巻きニュートリノと異なり，4次元時空だけでなくコンパクトな外次元空間にもはみ出して棲む右巻きニュートリノがあると，これが通常のニュートリノと湯川結合してディラック型の質量が生じ，しかも，外次元の取り方によっては質量が自然に小さくなる．この延長でも，様々な模型が提案されている．

5. 結び

ニュートリノの質量と MNS 行列の形が明らかになってきた．クォークの質量と KM（小林・益川）行列も最近の加速器実験で明らかになりつつある．そして，近い将来，さらに詳しく明らかにされそうである．前者の混合角のうち2つが最大値に近いのは，後者の混合角がいずれも3つとも小さいのと異なる顕著な特徴である．CP の破れも含めた詳しい行列の形やニュートリノ質量の詳しい値がわかれば，素粒子の世代とは何か？，質量は世代でなぜ異なるか？，という標準理論を越えた根本的な物理の研究に大きな手がかりを与えてくれるように思える．

（あらふね・じろう，大学評価・学位授与機構）

クォークの質量



岩崎　洋一

1. 序

自然界の基本粒子とそれらを支配する基本法則を求めることが，物理学の大きな目標である．基本法則には，重力定数のような基本定数が含まれる．この基本定数を定めることも，自然界を理解する上で重要なことの一つである．

クォークは自然界の基本粒子である．その質量は自然界の基本定数であり，それを確定することは，電子の質量を確定することに匹敵する重要なことである．

陽子の質量は $1.676485(86)\times10^{-27}$ kg，中性子の質量は $1.6749543(86)\times10^{-27}$ kg と非常に正確に分かっている．陽子，中性子は基本粒子クォークから構成されているので，単純に考えれば，陽子，中性子の質量は，近似的にクォークの質量の和となる．が，問題はそんなに簡単ではない．クォークは「閉じ込め」られていて，単独で粒子として取り出し，その質量を測定することができない．まず，クォークの質量をどう定義するかが問題となる．

この稿では，クォークとは何かを簡単に触れた後に，クォークの「閉じ込め」を紹介し，クォークの質量をどう定義し決定するかを説明する．クォークの質量を決めるには，格子量子色力学が必要となるので，その説明を行い，最近の結果をまとめる．

2. クォーク

自然界の基本法則は，現時点で分かっている限りでは，「標準理論」と呼ばれるゲージ理論である．最近のニュートリノ振動を含む形に「標準理論」を拡張すれば，この「標準理論」は，すべての実験結果，観測結果を見事なまで無矛盾に説明する．この理論に含まれる基本粒子は，クォーク，レプトン，ゲージ粒子と，実験的には未発見のヒッグス粒子とに分類される．

クォークは6種類存在する．それらは，表1に示すように，u クォーク，d クォーク，s クォーク，c クォーク，b クォーク，t クォークである．それぞれ，up, down, strange, charm, bottom, top の頭文字をとったものであるが，名前に特に意味はない．表1の電荷 Q の値からも分かるように，u クォークと d クォーク，s クォークと c クォーク，b クォークと t クォーク，がそれぞれ組をなしており，世代と呼ばれ，3世代存在する．なぜ3世代存在するのかは，将来解決すべき素粒子物理学の大きな問題である．

さらに表1に，クォークの質量の値をまとめておく．クォークの質量はその定義によって値が変わるので，数値自体は注意深く扱う必要がある．この表で用いた定義は後で説明する．

この表1から第一に気付くことは，質量の値がクォークの種類によって大きく変わる点である．一番軽い u クォークの質量と一番重い t クォーク

表 1 質量の単位は MeV. クォークの質量は定義によることに注意. ここでは, 後に詳説したように, MS バー・スキームの値. ただし, 繰り込み点のスケールは u, d, s クォークの場合は 2 GeV であるのに対し, c, b, t クォークの場合は粒子の質量自身である. u, d, s, c, b クォークの 5 種類のクォークの値は最近の格子 QCD の計算結果に基づいている. t クォークの質量は格子 QCD 以外の結果である.

クォークの種類	Q（電荷）	質量（MeV）
u（up）	+2/3	2.45（20）
d（down）	−1/3	4.45（20）
s（strange）	−1/3	90（10）
c（charm）	+2/3	1,300（100）
b（bottom）	−1/3	4,300（100）
t（top）	+2/3	165,000（5000）

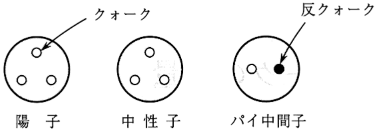


図 1　クォーク模型.

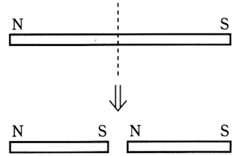


図 2　棒磁石の分割. 単独に N 極を取り出すことはできない.

の質量の比は, 5 万倍以上である. なぜこのような幅広い値をとるのかも, 将来解決すべき問題である.

3. クォークの閉じ込め

陽子, 中性子, パイ中間子など強い相互作用をする粒子をハドロンと総称する. ハドロンは, さらに, バリオン（フェルミオン）とメソン（ボゾン）に分類される.

図 1 に示すように, 陽子, 中性子などバリオンはクォーク 3 個, パイ中間子などメソンはクォーク 1 個と反クォーク 1 個から構成される. これをクォーク模型と言い, 1964 年にゲルマンとツヴァイクによって独立で提唱された. クォークという名前はゲルマンによるもので, ジェームス・ジョイスの小説『フィンネガンの徹夜祭』の中に出てくるジョイスによる造語である. 提案された当時は, クォークの実在性に関しては, 提案した本人たちも他の人も半信半疑であった.

しかし, ハドロンの種々の性質をクォーク模型は見事に説明することが明らかになっていった. 一方, クォークを実験的に発見しようという努力は何人もの実験家によってなされたが, どうやっても, クォークは発見されなかった. 一方で, クォーク模型の有用性が次第に確かめられていくのに, 他方でクォークが発見されないという矛盾は年々深刻になっていった.

やがて, 1973 年から 1974 年にかけて, クォークはハドロンの中では存在するが, クォークは単独では存在しえないという仮説が出された. これをクォークの「閉じ込め」と言う. この仮説は一見トートロジーのように聞こえるが, 数学的に定式化され, 物理学的アナロジーを考えるとそうでないことが分かる.

アナロジーとして棒磁石を考えよう. 棒磁石は, 一方の端が N 極で, 他方が S 極である. 充分長い棒磁石を考えると, N 極と S 極がそれぞれ独立の磁荷をもっているように考えられる. そこで, N 極だけを取り出そうとして, 図 2 のように, 棒磁石を半分にすると, 割れ目に S 極と N 極の対ができて, 元と同じような棒磁石が 2 本できるだけであって, N 極を単独で取り出すことはできない.

陽子の場合も, 1 個のクォークを取り出そうとして, 1 個のクォークを強くたたく（実際には, 加速器を用いて他の粒子を衝突させる）と, 図 3 のように, やはり割れ目にクォーク対ができて, 結果としていくつかのパイ中間子などのハドロンが生成されるだけで, クォークを単独で取り出すことはできない.

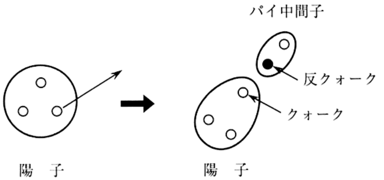


図３　クォーク１個を衝突によって取り出そうとしても，単独に取り出すことはできない．

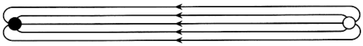


図４　色電荷に対する完全反誘電体の中にクォークと反クォークを置いたときの色電気力線．色電気力線は絞られてひものようになる．クォークと反クォークの間の距離を広げても，真ん中のあたりの様子は変わらず，エネルギーは距離に比例して大きくなる．

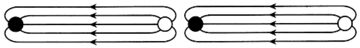


図５　図４でクォークと反クォークの距離を増やしていくと，ついにクォーク対を新たに発生して，ひもは切れる．

クォークは色と呼ばれる自由度をもつ．3種類の色をもち，この自由度に対するゲージ理論が $SU(3)$ ゲージ理論であり，これをQCDと呼ぶ．真空が，この色電荷に対して完全反誘電体であると，クォークと反クォーク間の色電場は図４のように絞り込まれ，ポテンシャルは距離に比例して大きくなる．すなわち，クォークと反クォークを無限大の距離に離すには，無限のエネルギーが必要となる．これが「閉じ込め」である．無理に距離を離していけば，途中で切れたほうがエネルギー的に得をするので，図５のように，クォーク，反クォーク対を発生する．

群 $SU(3)$ の１次元表現のもの（“無色”）だけがエネルギーが有限で，ハドロンとして観測される．

4. クォークと電子の違い

前節に詳説したように，クォークはハドロンに「閉じ込め」られている．この点が，同じ基本粒子ではあるが，電子などと根本的に異なる点である．したがって，自由電子のように，電場と磁場を用いてクォークの質量を測定することはできない．この電子とクォークの差は根源的なものである．

電子と光子からなる系は，量子電磁気学，QED（Quantum Electro Dynamics）によって記述される．QEDは群 $U(1)$ のゲージ理論であり，光子はゲージ粒子である．一方，クォークはグルーオンを媒介し相互作用する．クォークとグルーオンの系は，量子色力学，QCD（Quantum Chromo Dynamics）によって記述される．QCDは群 $SU(3)$ のゲージ理論であり，グルーオンはゲージ粒子である．

QEDとQCDの違いは，群が $U(1)$ と $SU(3)$ の違いである．$U(1)$ は可換群であり，$SU(3)$ は非可換群であり，この違いが，電子は自由粒子として存在できるが，クォークは「閉じ込め」られていて自由粒子として観測できないという，根本的な違いを引き起こす．また，QCDは漸近的自由という，クォーク間の距離が近距離になると，その間の力が距離とともに弱くなる（または，クォークのエネルギーが高くなるとクォーク間の力が弱くなる）という著しい性質をもつ．一方，QEDでは，よく知られたように，クーロンの法則によって近距離になるに従って力は強くなる．この違いも群の違いによる．

5. 格子量子色力学

クォークとグルーオンの系を記述する基本法則はQCDであり，このラグランジアンまたはハミルトニアンを書き下すことは簡単である．

ハミルトニアンは基本パラメターとして，6種類のクォークの質量と１つのゲージ結合定数を含む．一方，QEDの場合は，電子の質量とゲージ結合定数（電荷）を含む．

QEDのときは，ハミルトニアンが与えられれば，摂動論（ファインマン・ルール）と繰り込み理論を用いて，異常磁気能率などの物理量を，電

子の質量と電荷の関数として計算できる．計算された異常磁気能率などの物理量を実験値と比較することにより，理論の正しさを検証し，また，他の物理量を予言することができる．

しかしながら，このよく確立した方法を QCD（量子色力学）に適用することができない．すなわち，摂動論を用いることができない．摂動論は，粒子が自由粒子として存在することを基本的に仮定しているのに，その仮定を満たさないからである．QCD は摂動論を用いないで計算しなくてはならない（QCD は漸近的自由を有するため，エネルギーの高い領域など限られた領域では，摂動論を用いることが可能である）．

一方，空間 3 次元，時間 1 次元の量子理論には，有名な紫外発散が存在する．摂動論では，この紫外発散を繰り込み処方によって取り除くことができた．

QCD では，摂動論を用いることができないので，理論の出発点から紫外発散を取り除く必要がある．連続空間上に定義された場を用いてハミルトニアンを書き下すと，必然的に紫外発散を含むことが知られている．このため，理論を非摂動的に扱うには，ハミルトニアンを書き下す段階から，紫外発散を取り除くことが必要である．

このような非摂動論的な取扱いをする理論として，現在知られているのは，格子量子色力学（Lattice QCD）である[1]．時間 1 次元を虚数化し，4 次元ユークリッド空間内に 4 次元ハイパーキューブの格子を考え，その格子上で理論を定義する．これが格子 QCD である．格子の大きさは有限にとる．

ファインマンの経路積分の方法により量子化し，任意の物理量の期待値は多重積分で表される．格子の大きさが有限であり，群もコンパクト群であるので，多重積分は数学的に何のあいまいさもなく定義される．物理量を計算した後，無限体積の極限をとる．QCD の場合，赤外発散は存在しないので，この無限体積極限は，何の問題もなくとれる．格子間隔の逆数が紫外発散の切断に対応する．物理量を有限の格子間隔で計算し，最終的に格子間隔ゼロの極限をとる．これを連続極限と呼ぶ．この 2 つの極限操作によって得られた値が最終的な求めるべき値である．

物理量の期待値である多重積分は，多重度が大きすぎ，通常の積分法では到底計算できなく，モンテカルロ法を用いる．

格子 QCD の計算は膨大な計算量を必要とする．一つの理由は，4 次元の問題であるため自由度が非常に多いという点である．一辺 30 の格子の場合，グルーオンと 1 種類のクォークだけで，4 千万程度の自由度になる．2 番目の理由は，クォークがフェルミオンであることに起因し，クォーク行列と呼ばれる行列の行列式が被積分関数に含まれる点である．この行列式が，上記の場合，1 千万行，1 千万列，程度の行列式になる．

1981 年ごろから，格子 QCD によるハドロン（陽子など）の質量の計算が始まったが，当時のコンピューターの計算能力は，要求される能力に比べて格段に劣っていた．このため，クエンチ近似と呼ばれる，真空中での動的なクォーク・ループの影響を無視した計算（クォーク行列式を 1 と置く近似）が，近年まで，主として行われた．現象論的な考察から，真空中での動的なクォーク・ループの影響のかなりの部分はゲージ結合定数に繰り込まれ，この近似は 10%程度では正しいであろうと考えられていた．

6. クォークの質量を求める方法

格子間隔 a の格子上に定義された格子 QCD のハミルトニアンは，6 種類のクォークの質量と 1 つのゲージ結合定数を含む．クォークの質量も，ゲージ結合定数も，裸の質量，裸の結合定数であり，格子間隔 a の関数である．

クォークの質量の値も，ゲージ結合定数も，アプリオリには分かっていない．しかし，任意の質量，結合定数に関して，物理量を計算することが原理的に可能である．裸の物理定数を求める具体的方法は次のような方法である．1 つの格子間隔に対して，物理定数の数（$6+1=7$）だけ物理量

を与え，その物理量を再現するように，裸の物理定数を調節する．これによって，この格子間隔に対する裸の物理定数が決められる（具体的な手順は，さらに込み入っていて，1つの結合定数に対して，物理定数の数（$6+1=7$）だけ物理量を与え，その物理量を再現するように，クォークの質量を調節し，その結果として格子間隔を得る．また，実際に行われている格子QCDの計算では，陽子，中性子などの物理量を計算する際には，軽いクォーク，u クォーク，d クォークと s クォークのみを取り入れた計算で充分であり，そのような計算が実行されている）．

裸の定数が定まれば，インプットとして用いた物理量以外の任意の物理量を計算でき，それらの連続極限を計算することにより，それらの物理量の予言となる．多くの物理量に対する計算結果と実験結果が一致することで，その理論の正しさが検証されることになり，採用したクォークの質量の値も正しい値であることが確認される．

この方法がクォークの質量を計算する方法である．この方法では，裸の質量が格子間隔の（通常は，逆数の）関数として求められる．この値を繰り込んだ値に変換する．繰り込みのスキームにはいくつかの方法があるが，通常は，MSバー・スキームと言われるスキームでの値への変換を行う．この変換方法は確立している．

重要な点は，どのようなスキームであっても，その質量の値は繰り込み点に相当するスケールの関数として与えられる点である．たとえば，MSバー・スキームを採用したとしても，繰り込み点のスケールが異なればクォーク質量の値が変わる．このスケールは，クォークの自己エネルギーをどのエネルギーまで繰り込むかに対応している．

電子のように自由粒子として振る舞う粒子の場合は，このような面倒なことはなく，自由粒子として振る舞うときの質量を物理的な質量と考え，それと一致する定義（ポール質量という）を一意的に用いることができる．

クォークの場合は，そのような一意的な定義は存在しない．

7. 具体的な計算例

格子QCDにおけるクォークの質量の具体例を見ていくことにする[2]．

7.1 クエンチ近似でのハドロン質量

格子QCDから，ハドロン（陽子など）の質量が正しく導けるかどうかは，格子QCDの試金石になるので，1981年に最初の計算[3]が行われたのを皮切りに，世界中の格子QCDの研究者が，その時点，その時点の最高性能をもつ計算機を用いてハドロンの質量を計算した．しかしながら，計算量が膨大であるため，なかなか思うような計算ができなかった．特に，初期の計算では，格子の物理的な大きさがハドロンの大きさに比べて小さいこともあった．さらに，連続極限をとるためには，異なる格子間隔の何点かで計算をして外挿する必要がある．このような系統的な最初の計算が，米国のGF11のグループによる1994年発表された仕事である[4]．

数値計算で信頼できる結果を得るのは，誤差を正しく評価する必要がある．誤差には2種類あり，統計誤差と，系統誤差をきちんと制御し評価しなくてはならない．1981年から15年以上にもわたるこのような世界中の仕事の積み上げを経て，日本のCP–PACSグループがクエンチ近似での統計誤差と系統誤差を充分小さく押さえた，信頼できる計算結果を2000年に発表し，格子QCDのクエンチ近似でのハドロン質量を確定した[5]．

この結果が示すことは，クエンチ近似の計算は，ハドロンの質量に関して，実験結果を10%の誤差の範囲で再現する．この結果は，予想されていたことと一致する．しかし，実験値と数パーセントの明らかな食い違いがあることも確立し，クエンチ近似の限界をも明らかにした．

このような系統的な信頼できるハドロン質量の計算結果から，クォーク質量のクエンチ近似での結果を得ることができる．その結果を次に示すことにする．

7.2 クエンチ近似でのクォーク質量

u クォークと d クォークの質量を同じと近似す

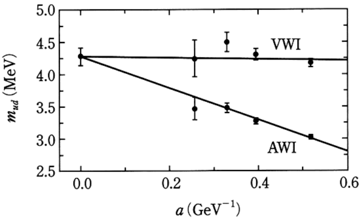


図 6　クエンチ近似での u クォークと d クォークの平均の質量．参考文献 5) の 2 番目の論文から再掲．

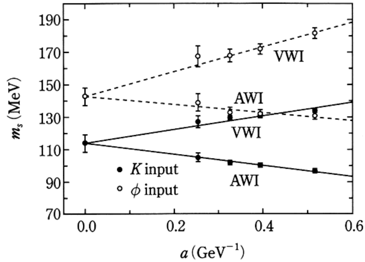


図 7　クエンチ近似での s クォークの質量．参考文献 5) の 2 番目の論文からの再掲．

る．この値は u クォークと d クォークの質量の平均値と考えてよい．u クォークと d クォークの質量の違いを格子 QCD で計算することは，現時点ではまだできていない．

u クォークと d クォークの質量の平均値の結果を図 6[5] に表す．横軸は，格子間隔を単位（GeV の逆数）で表し，縦軸として，クォークの質量を単位（MeV）で表す．格子間隔として 4 点で計算をしてそれを外挿して，左端の連続極限の値を得る．クォークの質量は，MS バー・スキームのスケール 2 GeV の値である．

4 点の格子間隔それぞれに，記号 VWI と AWI の 2 種類の結果が表示されている．この 2 つの結果は 2 通りの計算方法による．VWI は，裸の質量から MS バー・スキームへ繰り込み定数を掛けて得た結果である．AWI は，カレント質量と呼ばれるものを，やはり繰り込み定数を掛けて，MS バー・スキームへ変換した結果である．有限の格子間隔では，この 2 通りの計算結果は異なるが，連続極限では一致した結果を与える．

s クォークの質量の計算結果を図 7 に示す．u クォークと d クォークの質量の平均値の結果と同様に，VWI と AWI の 2 種類の結果が表示されている．さらに，インプットとして，K メソンの質量を用いた場合と，ϕ メソンの質量を用いた場合の両方の結果が重ねて書かれている．それぞれのインプットに対して，VWI と AWI の 2 種類の結果は連続極限では一致した結果を与えるが，その値はインプットに依存する．これは本来あってはならない結果である．どのような物理量をインプットとして用いても，クォークの質量が同じになることが，理論が無矛盾に存在するための必須条件である．この結果は，ハドロンの質量が実験値とずれたことに対応し，クエンチ近似の限界を表している．

7.3 フル QCD でのクォーク質量

前節での議論から分かるように，クエンチ近似の限界が明らかになった．次のステップは，正しくクォークの動的な効果を取り入れることである．これは最初からやらなくてはならない当然のことであるが，計算量がクエンチ近似と比較し 100 倍以上になるのでなかなか実行できなかったのである．

まず，u クォークと d クォークの質量を同じととり，この 2 種類のクォークの動的な効果を取り入れる．s クォークの動的な効果は無視し，この部分はクエンチ近似を用いる．この種の計算を「2 フレーバーのフル QCD」と呼ぶ．軽いクォーク，u クォークと d クォークの動的効果は充分大きいが，s クォークは比較的重いので，その動的効果はそれほど大きくはないと考えられる．

u クォークと d クォークの質量の平均値の結果を図 8 に表す．クエンチ近似の結果に比べて，25%ほど小さい値をとることが分かる．

s クォークの質量の計算結果を図 9 に示す．この場合も，クエンチ近似と比較し，約 20–30%程度小さい値をとる．さらに重要なことは，インプッ

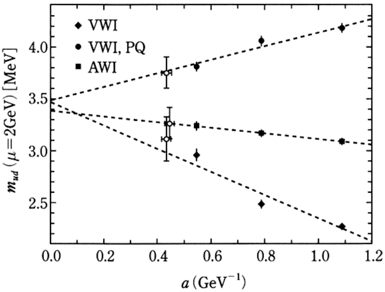


図 8　フレーバー 2 のフル QCD での u クォークと d クォークの平均の質量．文献 6) から再掲．

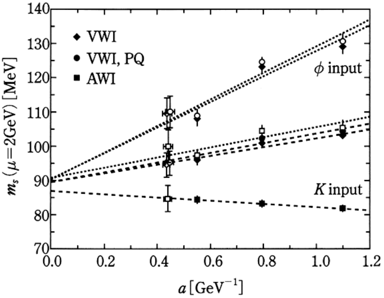


図 9　フレーバー 2 のフル QCD での s クォークの質量．文献 6) から再掲．

トとして，K メソンの質量を用いた場合と，ϕ メソンの質量を用いた場合の結果が誤差の範囲で一致し，s クォークの質量が，ユニークな値として求まる点である．これによって，クエンチ近似のときに露呈した根本的な問題が解決された．

ここで，数値をまとめておく．

$$
\begin{aligned}
M_{ud} &= 3.45^{+0.14}_{-0.20}\,\mathrm{MeV},\\
M_s &= 89^{+3}_{-6}\,\mathrm{MeV} \quad (M_K\,\mathrm{input})\\
&= 90^{+5}_{-10}\,\mathrm{MeV} \quad (M_\phi\,\mathrm{input}).
\end{aligned}
$$

この s クォークの質量の値，約 90 MeV という値は，従来の現象論で求められていた値と比べてかなり小さい値であり，CP の破れに関する実験結果から CKM 行列の要素を求めるときに大きな影響を与える．

u クォークと d クォークだけでなく，s クォークの動的な効果を入れた計算が最終的な答を与える（他の 3 種類のクォークの動的な影響は無視できる）．現在そのような計算が進行中であり，近いうちに結果が得られるであろう．この種の計算を「3 フレーバーのフル QCD」または「2+1 フレーバーのフル QCD」と言う．「2 フレーバーのフル QCD」の結果とそれほど大きくは，ずれないと考えられる．

8. まとめとコメント

u クォークと d クォークの質量それぞれを求めるには，現時点では，モデル計算の結果を用いる必要がある．カイラル摂動論の結果，u クォークの質量と d クォークの質量の比は 0.55 である．これを用いて，表 1 の結果を得る．

残りの，c クォーク，b クォーク，t クォークに関しては簡単に触れることにする．

c クォークの質量は約 1.3 GeV 程度であり，現在計算が行われている格子の格子間隔の逆数が同じ程度であり，有限格子間隔の効果をきちんと取り扱う必要がある．最近，この点を注意深く考慮した計算がクエンチ近似の範囲でなされた[7]．この値を表 1 に引用した．ただし，クエンチ近似であることを考慮して，エラーは 3 倍にした．「フレーバー 2」の計算が近いうちに得られるであろう．

現在計算が行われている格子 QCD の格子間隔の逆数は 1–2 GeV であるが，b クォーク，t クォークの質量は，これより大きいので，通常の格子 QCD の計算の方法を適用することができない．b クォークの場合は，b クォークと反 b クォークの束縛状態が実験で観測されている．この 2 体系は，電子と陽電子の束縛状態と似た系であり，b クォークおよび反 b クォークは非相対論的な運動をしている．そこで，格子 QCD の非相対論的な有効理論を構築して，その理論を用いてこれらの束縛状態のエネルギーを計算して，その値を再現するよう

にクォークの質量を計算する[2,8]．この場合は，非相対論的なハミルトニアンに相対論的な補正を加える必要がある．また，このフォーマリズムでは，格子間隔ゼロの連続極限をとることはできない．これらのことによる系統誤差を正しく見積もることが肝要であり，研究者はこの点で工夫と地道な計算を積み重ねている．このようにして得られた値が表 1 に示した値である．

t クォークの場合は，t クォークの質量が非常に重いため，t クォークと反 t クォークとの束縛状態の寿命が短くなり，重なり合う共鳴状態となり，束縛状態のエネルギーは実験的に実測されていない．そのため，b クォークの質量のときに用いた，格子 QCD の非相対論的な計算方法は適用できない．一方，陽子と反陽子の衝突実験で，t クォークと反 t クォークの対が生成されたとき，t クォークは b クォークと W メソンに崩壊する．反 t クォークも同様である．t クォークの質量が非常に重いため，このプロセスは摂動論を用いて評価できる[9]．このような理由で，t クォークの質量は，他の 5 種類のクォークとは異なった方法で得られた結果である．値は表 1 に示してある．

表 1 に関してもう一つコメントをする．すべて MS バーの値であるが，c クォーク，b クォーク，t クォークの場合はそのスケールがその粒子の質量そのものであるのに対して，u クォーク，d クォーク，s クォークの場合はスケールが 2 GeV である．このスケールは自己エネルギーのうち，どのエネルギーまで質量に繰り込むかに対応している．c クォーク，b クォーク，t クォークの場合は，自身のコンプトン波長より短い波長のグルーオン，クォーク対の寄与のみを繰り込んである．u クォーク，d クォーク，s クォークの場合，質量が小さいため，自分自身の質量のスケールで計算することが簡単でない．エネルギーが低くなるほど非摂動的効果が大きくなるためである．

陽子がクォーク 3 個から構成されるとするクォークモデルで考えると，クォークの質量は，陽子の約 3 分の 1 の 300 MeV 程度と考えるのが普通である．これをコンスチエント・クォーク質量と言う．一方，表 1 に挙げてある値は 2 MeV 程度である．この値は，基本的に，カレント・クォーク質量と言われているものである．この 2 桁の違いは何に起因するのか考えてみる．仮に，MS バー・スキームでスケールを下げ，クォークの質量自身にスケールをとることが可能ならば，この値が数百 MeV 程度になると考えられる．実際には，MS バー・スキームでは，このことは困難であるが，可能と考えられる他のスキームはあるので，将来この点を確かめてみるのは面白いと思える．

このように，スケールをきちんと定めないと，クォークの質量自体が大きく異なる場合がある．このような点を避けるために，繰り込み点によらない定義も最近提案されている．

将来，格子 QCD の計算がさらに進展するにつれて，表 1 の値は変わってくるが，大きくは，ずれなく，誤差が小さくなると考える．最初にも触れたが，6 種類のクォークの質量の値がなぜこれだけバラエティに富んでいるのかが，これからの素粒子物理学にとっての大きな謎である．

参考文献

1) 格子量子色力学の教科書，解説として次のものを挙げておく．
M. Crentz, “Quarks, gluons and lattices”, Cambridge University Press, UK, (1983); I. Montvay & G. Münster, “Quantum Fields on a Lattice”, Cambridge University Press, UK, (1994); 岩崎洋一，『格子ゲージ理論』，物理学最前線 11，共立出版，(1985).
2) クォークの質量の格子量子色力学の計算の最近のレヴューとして次のものを挙げておく．
V. Lubicz, *Nucl. Phys.* **B** (*Proc. Suppl.*) **94** (2001) 116; T. Kaneko, *ibid.* **106** (2002) 113; H. Wittig, *ibid.* to appear.
3) H. Hamber and G. Parisi, *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981) 1792; D. Weingarten, *Phys. Lett.* **109B** (1982) 57.
4) F. Butler et al., *Nucl. Phys.* **B430** (1994) 179.
5) CP-PACS Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 238; *Phys. Rev.* in press.
6) CP-PACS Collaboration, *Phys. Rev.* **D64**, 054505 (2002).
7) J. Rolf and S. Sint, *JHEP*, **0212**: 007 (2002).
8) A. El-Khada and M. Luke, hep-ph/0208114.
9) 隈野行成，日本物理学会誌．**57** (2002) 719.

（いわさき・よういち，筑波大学物理学系）

プランク質量

量子重力に現れる巨大スケール



中西　襄

1. プランク質量とプランクの長さ

よく知られているように，特殊相対論は光速度 c により，量子論はプランク定数 h の $1/(2\pi)$ 倍 $\hbar$ により特徴づけられる．これらを単位量とする単位系は，人為的に定義された単位系と区別して，「自然単位」と呼ばれる．素粒子物理学は，通常，自然単位で記述される．このときすべての物理量は，長さの冪の次元を単位として書けることになる．あるいは，その逆数をとって，質量の冪の次元を単位として表わしてもよい．

それでは，質量の次元をもつ自然な基本定数は，何だと考えるべきであろうか．素粒子はあまりにもたくさんあり，特定の素粒子の質量を特別視するのは正当とは思えない．相互作用定数は，現在の標準理論では自然単位ですべて無次元量である．したがって，通常の素粒子物理学の枠内では，第3の基本定数はないと考えてよい．ところが古典重力理論に注目すると，そこには自然単位でも無次元量にならないニュートンの万有引力定数 G がある．この定数はアインシュタインの一般相対論でも，$\kappa=(8\pi/c^4)G$ として取り込まれており，理論に含まれる唯一のパラメーターである．それは時空構造を決定するパラメーターであるから，それを基本定数と考えるのは非常に説得力がある．そこで，以上の3つの基本定数から作られる質量次元の量

$$M=(\hbar c/G)^{1/2}=2.177\times10^{-8}\,\mathrm{kg}$$

を「プランク質量」と呼ぶ．

数値だけ見ると，プランク質量はチリのような小さな量に見えるかもしれないが，実は途方もなく巨大な量なのである．それを実感するには，自然単位で，M の逆数を考えてみればよい．すなわち，「プランクの長さ」

$$l=(\hbar G/c^3)^{1/2}=1.616\times10^{-35}\,\mathrm{m}$$

は極端に微小な長さであるから，その逆数は巨大な量なのである．

以上の議論で注意していただきたい点は，$\hbar$ と G とでは登場している舞台が異なっているということである．両方が同時に登場するためには，重力場は量子化されていなければならない．すなわち，プランク質量なり，プランクの長さという概念は，量子重力において初めて意味をもつ概念である．量子力学の成立以前にカルーツァとクラインは，重力場と電磁場を統一するため5次元重力理論を考え，第5軸方向が小さく丸まって電磁場が出てくるとしたが，そのサイズがプランクの長さ程度だと仮定する根拠は全くない．この理論では，結果として，プランク質量の粒子の存在を主張することになるが，そのような素粒子の存在は，量子重力においてさえ何の論理的必然性もないものである．プランクの長さ，もしくはプランク時間は，2つの事象を2つの事象として区別できる

限界を表わしていると考えるべきであろう．そのようなサイズにトポロジカルな幾何学的構造をもち込むことが，そもそもナンセンスなのである．

2. 紫外発散除去の期待

現在のわれわれの自然認識において，プランク質量が定量的な物理的意味をもつような現象は知られていない．プランク質量とは，要するに，物理的には無限大なのだが，数学的には有限だという，まことに重宝な量なのである．つまり，数学的困難である無限大は処理してくれるが，その副作用が実験にかかって理論が馬脚を現すことは当分ないという妙味のある量である．本当はそのことを論理的にきちんと示さなければいけないのだが，実際やっているのは，多分うまくいくだろうという希望的観測である．とはいっても，もちろんなるべく不自然な人為的設定がないのが望ましいことは，いうまでもない．

よく知られているように，場の量子論には紫外発散という無限大の困難がある．さいわい現在の標準理論は繰り込み可能で，すべての無限大を理論に含まれている有限個のパラメーターに吸収して，実験にかかる量をすべて有限確定にすることができる．その範囲では問題がないわけだが，素粒子の質量スペクトルまで理論的に説明しようとすると，質量の繰り込みが有限量でないと具合が悪い．そこで，素粒子物理学においてずっと無視され続けてきた量子重力がうまく作用して，プランク質量が紫外発散のカットオフの役目を演じてくれるものと期待する．

紫外発散が対数的発散（すなわちカットオフして計算した積分がカットオフ因子の対数関数を含む）だと，プランク質量でカットオフすれば，プランク質量と素粒子の質量との比の対数が出てくるので，前者が巨大量でもあまり大きくない人畜無害な量になる．ところが，標準理論では由緒の定かでないヒッグス場というのがあって，その自己エネルギーの発散は2次発散である．この場合，質量比の2乗という巨大量がもろに出てきて，質量スペクトルの議論など全くできなくなってしまう．そこで素粒子としてのヒッグス場を導入しないで，ヒッグス機構を起こさせるようにはできないかと考えられたが，繰り込み可能な理論を作るのは難しい．今のところ，最も有望視されているのが超対称性（SUSY）理論で，SUSY ならば2次発散は現れない．しかし，これだけたくさんの素粒子に対して一つもそのスーパーパートナーが見つかっていないことを考えると，SUSY が現実的な対称性である可能性は極めて低いように思われる．

3. 量子重力の摂動論

重力理論は，少なくとも古典論に関する限り，「アインシュタイン重力」とも呼ばれる一般相対論に優る理論はない．重力場は，時空計量を表わす4次元対称テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ $(\mu,\nu=0,1,2,3)$ である．これを決める方程式がアインシュタイン方程式で，10元連立非線形2階偏微分方程式である．その左辺は，一般座標変換共変性と共変微分がゼロという条件で決められた，時空に関する微分を2つ含む量なので，自然単位で（以下すべて自然単位で書く）質量の2乗の次元をもつ．右辺は，系のエネルギー運動量対称テンソル $T_{\mu\nu}(x)$ である．その00成分の空間積分が全エネルギーを与えることからも分かるように，$T_{\mu\nu}(x)$ は質量の4乗の次元をもつ．したがって，右辺と左辺の次元が一致するためには，右辺に質量の -2 乗の次元をもつ係数をかけておくことが必要になる．これがアインシュタイン定数 κ である．これはプランクの長さの2乗の 8π 倍に他ならないから，極めて小さな数である．そのため，素粒子が重力場に影響を与える現象を観測することは不可能といってよい*1)．

重力場そのものの量子的効果を直接観測することは，まず不可能である．それゆえ，重力場は量子化しなくてもよいのではないかという意見もあ

*1) 素粒子の自由落下のように，重力場が素粒子に与える影響ならば観測にかかる．

り得る．しかし，アインシュタイン方程式の右辺に現れる $T_{\mu\nu}(x)$ は，場の量子論では，普通の数（c 数）ではなくて，量子場の関数というオペレーター（q 数）である．したがって，左辺が c 数のままではアインシュタイン方程式は，自己矛盾する．右辺で期待値をとるなどという姑息な逃れ口上では，もちろんうまくいかない．やはり，重力場そのものを量子化するのが自然である．

アインシュタイン方程式は，作用積分から変分原理によって導くことができる．作用積分は一般座標変換に対して不変な量でなくてはならない．重力場のみを含み，微分の数は 2 つまでと限定すると，可能な重力場部分の作用積分は，

$$S = \int d^4x (2\kappa)^{-1} \sqrt{-g}\,(R + \lambda) \qquad (1)$$

となる．ここに $g = \det g_{\mu\nu}$，R はスカラー曲率，κ と λ は定数である（κ は上述のアインシュタイン定数）．S は無次元量なので，被積分関数（ラグランジアン密度）は質量の 4 乗の次元をもつ．R, κ^{-1}, λ の次元は，いずれも質量の 2 乗である．λ は「宇宙定数」と呼ばれ，ほとんどゼロと考えてよい*2)．以下では簡単のため，$\lambda = 0$ とする．

重力場の量子化は，いろいろな方法が提案されているが，最も簡便かつ安直なやり方は摂動論である．この方法は，ラグランジアン密度が自由場部分と相互作用部分に分けることさえできれば，あとはファインマン・ダイソン理論もしくはファインマン経路積分によって機械的に量子論が構成できる．ここで，自由場のラグランジアン密度は場の量について 2 次式，相互作用のラグランジアン密度は 3 次以上で，通常前者に含まれない結合定数と呼ばれるパラメーターを係数とする．摂動論は要するにこの結合定数に関する冪展開なので，それが小さいときに意味があると考えられる．

アインシュタイン重力では，ラグランジアン密度は $g_{\mu\nu}(x)$ の複雑な関数であり，パラメーターは全体に逆数としてかかっている κ のみである．

そこで次のような仮定を導入する：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \sqrt{\kappa}\, h_{\mu\nu}. \qquad (2)$$

ここに，$\eta_{\mu\nu}$ はミンコフスキー計量，$h_{\mu\nu}$ は量子論的な計量の揺らぎを表わすあらわに $\sqrt{\kappa}$ に依存しないオペレーターである．これを (1) 式（$\lambda = 0$ としている）に代入し，$\sqrt{\kappa}$ について冪展開する．$\sqrt{\kappa}$ について -2 次の項はゼロ．-1 次の項は，$\eta_{\mu\nu}$ が $\kappa = 0$ のアインシュタイン方程式の解なので，やはり消える．それゆえ 0 次の項から始まることになるが，それは $h_{\mu\nu}$ の 2 次式で，ちょうどスピン 2，質量ゼロの自由場のラグランジアン密度になっている．1 次以上は非常に複雑だが，次元解析から明らかなように $h_{\mu\nu}$ について 3 次以上で，相互作用ラグランジアン密度とみなすことができる．したがって，摂動論が適用できる（ただしゲージ固定などの操作が必要で，それについては後述）．なお，(2) 式において，$\eta_{\mu\nu}$ の代わりに $\kappa = 0$ のアインシュタイン方程式の任意の古典解（背景場）を用いても，同じようにやれる．

ファインマン・ダイソンの共変的摂動論に従って量子重力のグリーン関数を計算すると，紫外発散が次つぎと現れる．$\sqrt{\kappa}$ の高次にいけばいくほど，いくらでも新手の種類の発散が出てくるので，いわゆるカウンター項を付け加えてそれらを処理しようとすると，無限にたくさんのカウンター項が必要となってしまう．つまり理論的に決定できない無限に多くのパラメーターが入った理論，すなわち繰り込み不可能な理論であることになる．なお，背景場を用い，発散項が背景場の一般座標変換に対して不変になるとして，発散項を求める方法があるが，この方法によると，物質場なしの 1 ループだけはよいが，2 ループ以上では発散項が残ってしまうことが分かっている*3)．

要するに，量子重力を摂動論で計算すれば，繰り込み不可能で，意味のある結果は得られない．これは確かな結論である．したがって，量子重力に摂動論を適用するのが悪いか，量子アインシュタ

*2) 最近の観測では，ゼロではない可能性が高くなっている．無次元量 $\kappa\lambda$ が 10^{-120} という超極端に微小な数になるのは，最大のミステリーとされている．

*3) 超重力理論では，少し改善されるが，本質的なところは同じである．

イン重力そのものが悪いか，そのいずれかである．非常に不思議なことに，多くの研究者が，後者が正解だと信じたのである．そしてその根拠は，共変的摂動論は素粒子物理学で非常にうまくいったのだから，量子重力でもうまくいくべきだとか，摂動論以外にうまい計算法を思いつかないからとかいうような，ことさらアインシュタイン理論の本質を無視したものなのである．

正解はむしろ前者とするほうが，より妥当であろう．実際，量子重力に摂動論を適用すべきではないと考えるのには，もっと合理的な根拠がある．第1に，素粒子物理学で成功した繰り込み可能性は，要するに超高エネルギーにおける正確な知識がなくても，その情報不足をパラメーターに繰り込んでしまえて，それさえ外から与えれば素粒子反応の計算ができるということである．もし，量子重力でも同じようにパラメーターに情報不足を繰り込むのであれば，プランク質量よりさらに高いエネルギーにいかなければ物理学が完結しないことになってしまう．第2に，もし初めに述べたように，プランク質量が第3の基本定数であるならば，自然な単位ではそれは1ととるべきである．すなわち $\sqrt{\kappa}=1$ なるゆえ，量子重力の摂動展開は，冪級数とはいえないことになる．したがって，$\sqrt{\kappa}$ をゼロでないパラメーターとしてではなく，最初から極限操作 $\sqrt{\kappa}\to 0$ を繰り返し使って定義される「漸近展開」の意味でしかとらえられない[*4)]．

第3に，重力場に対する共変的摂動論そのものが誤りである．というのは，摂動論を適用するために (2) 式を仮定したが，これは全く根拠のない勝手な仮定なのである[*5)]．実際，(2) 式が正しいとすると，$\kappa\to 0$ のとき $g_{\mu\nu}(x)$ はc数になるはずだが，正しくはq数になる．このことは，次のように簡単にいえる．古典論で，重力がなければ時空間はミンコフスキー空間であるが，それでも $g_{\mu\nu}(x)$ は一般座標変換だけの自由度をもっている．つまり $\kappa\to 0$ としても，この4自由度はなくならない．量子論に移ると，この自由度だけをc数のまま残しておくことは数学的に不可能なので，q数にならざるを得ない．すなわち $g_{\mu\nu}(x)$ は $\kappa\to 0$ でもq数である．

*4) 量子電磁力学の摂動展開も漸近展開だと推定されているが，これはあくまでも結果的にそうなるというのであって，初めから漸近展開として定式化されるのではない．

*5) この批判はもちろん量子超重力にも適用される．

4. 不定計量をもつ場の量子論

摂動論は，相互作用描像に基づいている．相互作用描像は，量子力学のシュレディンガー描像に対応するもので，計算には便利であるが，手で勝手に自由場部分と相互作用部分とに分けたりしていることからも分かるように，理論の基礎的考察には不適当な描像である．基本的な問題をきちんと考察するためには，やはりハイゼンベルク描像で定式化するべきである．

まず通常の場の量子論について，そのハイゼンベルク描像での定式化を簡単に説明しておこう．いくつかの量子場 $\varphi_A(x)$ が与えられているとする．ラグランジアン密度 $\mathcal{L}(x)$ は，$\varphi_A(x)$ とその時空偏微分 $\partial_\mu\varphi_A(x)$ の（同じ時空点 x^μ での）関数で，それを全時空間で積分したものが作用積分 S である．理論の構造は S によって決められる．S に対する変分原理 $\delta S=0$ から，そのオイラー方程式として場の方程式が導かれる．また，$\varphi_A(x)$ の正準共役量が，$\mathcal{L}(x)$ を $\partial_0\varphi_A(x)$ で偏微分したものとして定義され，正準交換関係が設定される[*6)]．これにより $\varphi_A(x)$ と $\partial_0\varphi_B(x)$ の同時刻交換関係が決まり，場の方程式と合わせて，$\varphi_A(x)$ のオペレーターとしての性質が定義されたと考える．

量子力学のシュレディンガーの波動関数に相当するものとして，状態ベクトルを考え，$|\alpha\rangle$ のように書く．2つの状態 $|\alpha\rangle$ と $|\beta\rangle$ の内積を $\langle\beta|\alpha\rangle$ $(=\langle\alpha|\beta\rangle^*)$ と表わす．波動関数のときと同様に，状態の全体はヒルベルト空間を張るとする．すなわち，$|\alpha\rangle\neq 0$ ならば，つねに $\langle\alpha|\alpha\rangle>0$ であるとする（計量の正定値性）．このことは，作

*6) フェルミオン場同士については反交換関係をとる．

用積分 S が内積に関してエルミートであると，素粒子反応の散乱振幅を与える S 行列はユニタリーになることを意味し，確率解釈が可能となる．

作用積分 S が並進およびローレンツ不変（ポアンカレ不変という）であると，ネーターの定理によって，4 次元運動量を表わす並進生成子 P_μ と 4 次元角運動量を表わすローレンツ生成子 $M_{\mu\nu}$ が存在する．エネルギーを表わすオペレーターである P_0 の固有値は正またはゼロで，ゼロ固有値の状態はただ一つであるとする．これを「真空」と呼び，$|0\rangle$ と記す．ポアンカレ不変性から，真空は P_μ および $M_{\mu\nu}$ のゼロ固有値の状態である．すべての状態は，量子場から生成されるオペレーターを真空に作用させることによって構成できる．

以上は通常の場の量子論の構成であるが，ゲージ理論や重力理論ではこの枠組みを拡張することが必要である．これらの理論では，局所ゲージ変換もしくは一般座標変換のように，時空点 x^μ ごとの変換（局所変換）に対して古典論の作用積分が不変になっているので，このままでは正準量子化ができない．そこで，その不変性を破る「ゲージ固定項」というものを作用積分に付け加える．しかしこれだけでは，元の理論の局所変換に対する不変性という情報が失われる．そこで局所変換の量子論版である「BRS 変換」という概念を導入する．これは簡単にいえば，局所変換の変換関数が c 数の任意関数であったのを，「FP ゴースト」と呼ばれるフェルミ統計に従う量子場で置き換えるのである*7)．したがって，古典論の作用積分は BRS 不変になる．さらに「B 場」と「FP 反ゴースト」という役者を付け加えると，ゲージ固定項を BRS 不変な形に直すことができる．このようにして，BRS 不変な量子ゲージ理論や量子重力理論の作用積分が構成される．

ゲージ理論や重力理論のもう一つの問題は，主役であるゲージ場や重力場が 4 次元ベクトルや 4 次元テンソルであるということである．ミンコフスキー空間の計量から分かるように，第 0 成分はスカラー積において符号が逆になっている．このため，この部分は量子化すると状態空間の内積の符号も逆になってしまう．すなわち，計量の正定値性が破れる．このように $\langle\alpha|\alpha\rangle$ が負にもなる状態ベクトルをもつ理論を，一般に不定計量の場の量子論という．不定計量の場の量子論では，S 行列はユニタリーにならず，このままでは確率解釈ができなくなる．

量子ゲージ理論や量子重力理論では，BRS 不変性のおかげで，この困難を克服することができる．ネーターの定理により，BRS 生成子 Q_{B} が存在し，BRS 変換を生成する．FP ゴーストがフェルミ統計に従うので，Q_{B} は超対称性演算子の一種であり，自分自身と反可換（$\{Q_{\mathrm{B}}, Q_{\mathrm{B}}\} = 0$），すなわち $Q_{\mathrm{B}}^2 = 0$ である*8)．したがって，Q_{B} の固有値はゼロのみである．しかし，Q_{B} を作用させてもゼロにならない状態が存在する．固有状態の 1 次結合で書けない状態の存在は，不定計量の場の量子論の特徴である．このような状態に Q_{B} を作用させて得られる状態を「BRS 完全」という．これは量子論的なゲージ自由度を表わすものである．

Q_{B} の固有状態の全体を「物理的部分空間」という．もちろん，真空は物理的部分空間に含まれるものとする．Q_{B} は P_0 と可換なので，物理的部分空間の定義は時間によらない．あるもっともらしい仮定の下に，物理的部分空間の計量は半正定値，すなわち $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$ であることが示せる．このうち $\langle\alpha|\alpha\rangle = 0$ になるのは，$Q_{\mathrm{B}}^2 = 0$ から分かるように，BRS 完全な状態に他ならない．BRS 完全な状態の全体で物理的部分空間の商空間を考える，すなわちゲージ自由度だけの違いは度外視すると，正定値計量の空間が得られる．この空間での S 行列を「物理的 S 行列」という．物理的 S 行列はユニタリーである．

*7) FP ゴーストは整数スピンをもつので，フェルミ統計に従うことは「スピンと統計の関係」に反するが，不定計量の場の量子論では可能である．

*8) エルミート演算子の 2 乗がゼロになることは，不定計量の場の量子論では可能である．

5. 量子重力による紫外発散除去の可能性

アインシュタイン重力は，一般座標変換という局所変換に対して不変であるから，量子化された理論，すなわち量子アインシュタイン重力は，BRS 不変性をもつ不定計量の場の量子論である．ゲージ固定項には，調和座標条件とも呼ばれるドドンデアの座標条件に対応するものを選ぶのが最も自然である．このドドンデア・ゲージの量子アインシュタイン重力は，極めて美しい理論として定式化される[1]．

さて，素粒子物理学における紫外発散の困難の成因は，大雑把にいうと，多くの高エネルギー中間状態からの寄与が同符号で効いてくることである．このことを最も雄弁に物語るのが，次のレーマンの定理である：

『状態空間の計量が正定値ならば，2 点グリーン関数の高エネルギーでの振舞いは，対応する自由場の 2 点グリーン関数のそれより弱くなることはない』

つまり，ファインマン・プロパゲーターの高エネルギーでの振舞いは，ヒルベルト空間で量子化する限り，相互作用をどんなに工夫してみても決して改善できないというのである．

スカラー場 $\phi(x)$ について具体的に書くと，その 2 点グリーン関数のフーリエ変換は，

$$-i\int_0^\infty ds\frac{\rho(s)}{s-p^2-i0} \tag{3}$$

のように表示できる．ここに p_μ は 4 次元運動量で，ウエイト関数 $\rho(s)$ は 2 点ワイトマン関数をスペクトル分解して得られる：

$$\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle=\int_0^\infty ds\rho(s)\Delta^{(+)}(x-y;s). \tag{4}$$

ただし，$\Delta^{(+)}(x;s)$ はそのフーリエ変換が非負であるような超関数である．状態空間の計量が正定値のとき，(4) 式の左辺に中間状態の完全系をはさむと，時空座標の指数関数の因子を除いて，$\sum_n|\langle 0|\phi(0)|n\rangle|^2$ が得られ，$\rho(s)\geq 0$ であることが分かる．質量 m の自由場のときは $\rho(s)=\delta(s-m^2)$ で，(3) 式の高エネルギーでの振舞いは $(p^2)^{-1}$ である．$\rho(s)$ が負になることがなければ，高エネルギーでこれより速く落ちることはない．(3) 式は，摂動論の繰り込み理論において現れる補正されたファインマン・プロパゲーターに他ならないから，正定値計量の理論を考える限り，紫外発散の困難の解決は容易でないことが分かる．

不定計量を導入すれば，$\rho(s)$ は負になり得るから，(3) 式の高エネルギーでの振舞いはいくらでも改善でき，紫外発散の除去はいとも簡単である．しかし，やみくもに導入した不定計量の場の量子論では，S 行列がユニタリーにならない．ユニタリーな物理的 S 行列が得られるローレンツ不変な不定計量の場の量子論は，BRS 生成子をもつ理論以外知られていない．それゆえ，量子ゲージ理論と量子重力理論を考えよう．ゲージ理論の場合は，$\phi(x)$ がゲージ不変量であると，Q_{B} と可換になるので，$\phi(x)|0\rangle$ が物理的部分空間に属してしまう．このとき，中間状態には物理的部分空間に属している BRS 完全でない状態だけの直交系をとれば十分だということがいえるので，レーマンの定理から逃れられない．

これに対し，重力理論の場合は，一般座標変換に対して不変な場というものはあり得ないから，量子重力場を考える限り，いかなる場に対してもレーマンの定理は適用できなくなる．つまり，s が κ のオーダーより大きいところでは，$\rho(s)$ が負になることが可能である．もちろんこれは，(3) 式の高エネルギーでの振舞いが本当に改善されるという積極的な主張ではないが，少なくともプランク質量が紫外発散のカットオフとしての機能を発揮する可能性があることを，たんなるお伽話としてでなく，理論的に示したわけである．

量子電磁力学には，「後藤・今村の矛盾」と呼ばれる深刻な困難がある．これは，電流の第 0 成分と電流の空間成分との同時刻交換子の真空期待値

$$\langle 0|[j^0(x), j^k(y)]|_{x^0=y^0}|0\rangle \tag{5}$$

を，2通りの方法で勘定したとき，両者が一致しないというものである．第1の方法は，電流 $j^\mu(x)$ は電子場とそのエルミート共役との同時空点での積であるが，その特異性を気にしないで電子場に対する正準反交換関係を用いて計算するもので，結果はゼロである．第2の方法は，ローレンツ共変性，電流の保存則，ゲージ不変量に対する計量の正定値性を用いた一般的枠組みに基づくもので，結果は，

$$i\int_0^\infty ds\pi(s)\cdot\partial^k\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{6}$$

のようになる．ここに $\pi(s)$ は恒等的にはゼロでない $\rho(s)$ と同じようなウエイト関数で，やはり同様な理由により非負である．したがってその積分はゼロになることはない．この矛盾の通常の解決法では，第1の方法が誤りで，電子場の同時空点での積の特異性をきちんと考慮すれば，(6) 式のような項（「シュウィンガー項」と呼ぶ）が出てくるものとしている．

しかしながら，シュウィンガー項のようなものの存在を認めると，正準量子化に基づくハイゼンベルク描像での場の量子論の構成は破綻する．同時空点での積がいちいち問題になったのでは，アインシュタイン方程式のような複雑な非線形方程式を取り扱うことは不可能である．重力場を考えなくても，一般にシュウィンガー項の具体的な式は特異性処理の仕方に依存し，またそれを与えるような交換子はヤコービ恒等式を満たさない．しかもその存在は，観測可能量には何の影響も与えない．シュウィンガー項はないのが望ましい．

実際，レギュレーターの方法を用いると，シュウィンガー項は現れない．レギュレーターというのは，十分大きな質量をもつ仮想的な不定計量の場で，紫外発散をすべて除去するように導入される．しかし質量がいかに大きくても，有限である限りはS行列のユニタリー性を壊すので，最後に無限大の極限を取らなくてはならない．これは結局，$\pi(s)$ に負係数の $\delta(s-\infty)$ を付け加えて，$\pi(s)$ の積分をゼロにすることに他ならない．しかし，$\delta(s-\infty)$ などというものは，数学的に許されない．

この困難は，量子重力場を考えれば解消する．レーマンの定理の場合と同様に，$\pi(s)$ は s が κ のオーダーより大きいところでは，負になってもよいからである．もともと素粒子物理学では，κ があまりにも微小だからという理由で，重力場と相互作用していることを無視してきた．だからこの近似が正当なのは，もちろん考えるエネルギーがプランク質量に比べて十分小さいときである．ところが，シュウィンガー項の議論ではこのことを忘れ，κ のオーダーよりも大きいところまで近似の結果を絶対的な結論として盲信していたわけである．後藤・今村の矛盾の解決は，量子重力場を考慮するのが最も自然であろう[2]．

6. ハイゼンベルク描像での解法

3節で，量子重力場に対して共変的摂動論を適用するのは，誤りであることを指摘した．量子重力は，ハイゼンベルク描像で解かなければならない．その解法の概略を説明しておこう[3]．時空の次元数は4に限る必要はないので，D としておく．

出発点は，作用積分ではなく，場の方程式（BRS共変化したアインシュタイン方程式など）と正準交換関係である．これは非常に複雑な系であるが，これからすべての場の間の同時刻交換関係を閉じた形で求めることができる．場の方程式は1時空点に関する式なので，これを2つの場の D 次元交換子に対する偏微分方程式に書き換える．こうして，D 次元交換子系に対するq数のコーシー問題が設定される[*9]．このコーシー問題を解いて，すべての D 次元交換子を求める．もちろんこれは $D=2$ の場合を除いて，実際に遂行するのは不可能である．それゆえ，κ に関する冪展開を行い，逐次近似で計算することになる．この展開は，摂動展開のように勝手に平方根を導入した $\sqrt{\kappa}$ の冪ではなく，アインシュタイン方程式に元からあ

---

*9) このコーシー問題は，古典力学の初期値問題と異なり，初期条件を人為的に外から与えるものでないことに注意．

る κ の冪での展開で，かつ各次数で BRS 不変性が保たれる．D 次元交換子から，D 次元多重交換子を計算する．

次に，このオペレーター解の表現を構成する．しかし直接，量子場の行列表現を作ろうとしてもうまくいかない．かつてワイトマンは公理論的場の量子論の枠組みにおいて，場の量子論はすべてのワイトマン関数を与えることによって再構成できることを示した．今の場合は不定計量の場の量子論であるが，やはりすべてのワイトマン関数を与えることによって，表現が確定すると考えてよいであろう．ワイトマン関数は，(4) 式のように，量子場の単純積の真空期待値なので，上で求めた D 次元 $(n-1)$ 重交換子の真空期待値を考えると，それは n 点ワイトマン関数の 1 次結合で書けるから，連立 1 次方程式とみることができる．$n!$ 個の未知数に対し，$(n-1)!$ 個しか独立な方程式がないが，エネルギー正値性条件というもので情報不足を補う．技術的詳細を述べているときりがないので，説明はこれくらいにしておく．

問題は，この方法で実際にワイトマン関数系が求まるのかということであろう．答は，少なくともいくつかのモデルではイエスである．肝心のドドンデア・ゲージでの D 次元量子アインシュタイン重力についてはどうかというと，κ での冪展開の第 0 次については完全に求まる（$D=2$ では厳密解になる）．もちろん $g_{\mu\nu}(x)$ の第 0 次は，確かに q 数（B 場と非可換）である．$D>2$ の第 1 次以上の計算はとても複雑で，人力では手におえない．

4 次元量子アインシュタイン重力の紫外発散が，どうなっているかについては全く分からない．ただ，上述の方法で正確に解ける，パラメーターを含むある 2 次元量子重力のモデルが，この問題に対する参考となる[4]．このモデルは，そのパラメーターで (2) 式のような仮定をして，通常の共変的摂動論を適用すると，繰り込み不可能である．しかし，その厳密解は全く発散を含まない．摂動展開が根拠のない紫外発散を生み出していることだけは確かである．

7. まとめ

プランク質量は，量子重力を特徴づける巨大質量スケールで，通常の素粒子物理学には現れない．もちろん，プランク質量のオーダーの巨大質量をもつ素粒子のあるモデルはいくらでもこしらえられるが，重力定数との必然的な関連性が示されなければ，プランク質量と同定する意味はない[*10]．

量子アインシュタイン重力は，繰り込み不可能性を理由に多くの研究者により意味がないと考えられたが，これは共変的摂動論を適用したのが間違っていただけのことである．ハイゼンベルク描像で正しく解けば，困難が解決するかもしれない．実際，摂動論では繰り込み不可能だが，ハイゼンベルク描像で求めた厳密解は紫外発散を含まないような量子重力的モデルが存在する．

プランク質量には，紫外発散を自然にカットオフする役割が期待される．BRS 不変に定式化された量子アインシュタイン重力は，この期待に理論的なサポートを与えている．

参考文献

1) N. Nakanishi and I. Ojima, *Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity* (World Scientific, 1990), Chap.5.
2) N. Nakanishi, *Prog. Theor. Phys.* **63** (1980), 1823.
3) M. Abe and N. Nakanishi, *Intern. J. Mod. Phys.* **A 17** (2002), 1491 の引用論文.
4) M. Abe and N. Nakanishi, *Mod. Phys. Lett.* **A 10** (1995), 1501.

（なかにし・のぼる，京都大学名誉教授）

*10) (1) 式で微分の数を 2 つまでに制限しなければ，プランク質量の粒子がある量子重力理論が得られるが，それは BRS 不変性だけではコントロールできない不定計量理論で，確率解釈不能である．

書評　最大エントロピー法による時系列解析

MemCalc の理論と実際

常盤野和男・大友詔雄・田中幸雄著，A5 版，234 頁，2800 円，北海道大学図書刊行会



興味のあるシステムの挙動を時系列データとして観測し，周波数パワースペクトルを求めてダイナミックスの性質を分析したいという要求は，基礎から応用に至るまで，数理科学に関連する様々な活動領域に存在する．本書は，このような要求を持つ実務家に対して簡潔に応える特色ある著書である．「最大エントロピー法による時系列解析」という幾分地味で親しみの湧きにくいように感じられるタイトルではあるが，テーマは明瞭で，記述内容は面白い．データに基づいて実証できないような前提や仮定に頼ることなく，与えられた有限個のデータからパワースペクトルを一意に推定するための理論とアルゴリズムに記述の焦点が絞られている．このテーマは，予測・推論モデルをデータから帰納的に決定する問題を扱う統計学習理論に共通する部分が多いので，帰納的推論に関心のある研究者，技術者にも参考になるだろう．

本書は，第 1 章の書き出しから，巻末の参考文献リストに至る 222 ページにわたる記述からなる．第 1 章と第 2 章に全体の半分が当てられ，残りの半分が付録である．添付された CDROM（Windows 対応）には，お試し用のソフトウェア，データとその解析の事例が収録されている．少々驚かされる構成であるが，読み進むにつれて，著者らの工夫と意図が伝わってくる．第 1 章と第 2 章で厳密な証明抜きの説明を提示して最大エントロピー法のエッセンスを素早く理解させ，手元のパソコンに CDROM から手軽にインストールされたファイル群の操作を通して，このスペクトル解析法の特長を体験させよう，という意図であろう．所々に「Tea Time」と名付けられたコラムを設け，一問一答形式で理解を助けるための解説が加えられている．このコラムに進むと，読み手の気分がリフレッシュされる．また，取り上げられている問題も非常に面白い．

第 1 章は本書の核心部分である．有限個のデータだけが利用可能という状況が，パワースペクトルの推定にどのような影響を与えるのか，各節で繰り返し説明されている．性質が明らかではないダイナミックスから生み出される有限長時系列のパワースペクトルを，定常ガウス過程のパワースペクトルによって近似するという基本思想が明確に示されている．そして，近似過程を正則化（regularization）するために情報エントロピーをどのように利用するか，簡潔に述べられている．この章の記述は，関数近似による予測・推論モデルの最適化に関心のある読者にも参考になるであろう．この章における論理の展開を深く理解するための解説は，付録 1 にある．最大エントロピー法とは何か手っ取り早く知りたい読者にとって，詳細な解説が付録 1 に分離されていることはありがたい．

第 2 章は，時系列の fitting に関する話題を扱っている．最大エントロピー法によるスペクトル解析を利用して，一般化三角多項式の最適化を行なうのであるが，カオス時系列の短期予測のように，非線形システムの時系列予測に携わっている研究者や技術者にとっては，この章で展開される近似法は，少々異論を唱えたくなる手法かもしれない．しかし，そのような論争の種を捲くような含みがあること自体が，この章の価値の一部をなしていると言えるだろう．

付録 3 は，CDROM に収録されているデータとソフトウェアに関する簡単な解説である．様々なサンプル時系列に関する計算例がグラフ化されて示されている．これらは実務の参考になる．

本書は，扱うテーマが限定されたものであるから，初学者というよりも，むしろ，時系列解析の実務経験のある読者や，標準的なテキストを既に読んだ経験のある読者に向いているかもしれない．後者にとって，本書はとても新鮮でインパクトがある．自己相関関数とパワースペクトルの関係について再認識させられる．一方，初学者にとっては，最大エントロピー法がテーマであるのに，情報エントロピーとは何か解説がないことが不便であろう．1 節設けるか，あるいは，付録を増やして，情報エントロピーについて手短に解説してもよかったかもしれない．結論としては，初学者を含め，幅広い読者に一読をお奨めできる著書である．

宮野　尚哉（弘前大学理工学部）

クォーク星のきらめき



巽　敏隆

1. はじめに—物質の新しい形態

昨年 (2002 年) の 4 月, NASA は新聞発表において 2 つの興味ある観測結果を発表した．わが国の主要紙でも報道され話題を呼んだことは記憶に新しい．それは X 線観測衛星 "Chandra" によるコンパクトな天体の観測結果で，一つはクォーク星候補天体 (RXJ1856.5–3754) の発見[1] ともう一つは超新星残骸 3C58 の中にある点源 (パルサー) の表面温度が異常に低いというものである[2]．コンパクト天体としては中性子星がまず思い浮かぶが, その質量, 半径は $O(M_{\rm sun}$(太陽質量)), O (10 km) 程度であり内部は主に中性子と数 % 程度の陽子からなる核物質および電子から構成されると考えるのが "標準的" な描像であろう．これらの観測事実はともにこのような考えでは説明できないものであり，コンパクト天体内部の物質の新しい形態 (相) の必要性を示唆しているように見える．これらの発見は核物理に新たな "窓" を開き，広い宇宙とその最少構成粒子の間のつながりを与えるものとして期待されている．

通常の原子核密度 ($\rho_0 \sim 0.16{\rm fm}^{-3}$) を越えた高密度核物質での新しい相についてはこれまでにも π 中間子などの Bose-Einstein 凝縮，クォーク物質への非閉じ込め転移などが議論されてきた．これらの相はこれまで蓄積されてきたハドロン間相互作用，ハドロン多体系としての原子核の性質についての理論的，実験的理解を基礎に研究され，高エネルギー原子核衝突過程での新しい相の創成の可能性および中性子星などコンパクト星の観測データとの対比という両側面から追求されてきたが, 残念ながら現在のところ明確な証拠は見つかっていない．

この観点から今回の発表を見ると, これらの観測事実の興味深さ, 重要さがわかる．後で述べるように, クォーク星の内部はそのほとんどの部分が u, d, s クォークからなると考えられるので，そこではハドロンの内部に閉じ込められていたより下の階層であるクォーク自由度が解放されていることになる．一方 3C58 の問題は中性子星のニュートリノ放出による冷却機構と関連している．クォーク物質，クォーク星とは関係なく，中性子星内部のハドロン物質での新しい相と関係していると考えられる[*1]．この問題も大変興味あるが，本稿ではこれ以上触れず，クォーク星の問題に絞る．

2. クォーク星の発見？

クォーク星候補天体 RXJ1856.5–3754 は伴星などを伴わない孤立したコンパクト天体であると考えられ，またパルサー (中性子星) のようなパルスは観測されていない軟 X 線源である．地球からの距離は比較的近く，明るいので Hubble 望遠鏡によって光学的にも観測されている．視差の測定から距離 D は $D \sim 140$pc (460 光年) と推定されている．Drake たち[1] は ChandraX 線観測衛星の観測結果から (i) X 線スペクトルは温度 $T^\infty = 61\,{\rm eV}$ (約 70 万 K) の黒体放射と考えるとよく合うこと，(ii) X 線の全放射率 $L_{\rm X}^\infty$ は $L_{\rm X}^\infty = 3 \times 10^{31}(D/100{\rm pc})^2{\rm erg\ s}^{-1}$ と報告した[*2]．いま温度が T で半径 R の球体の黒体放射を考えるとその放射率は

$$L_{\rm X} = 4\pi R^2 \sigma T^4 \qquad (1)$$

---

*1) 例えば π 中間子凝縮のアイデアを使った中性子星の冷却によって説明できることが示されている[3]．

*2) 観測結果に関する論争点などについては参考文献 4) を見て下さい．

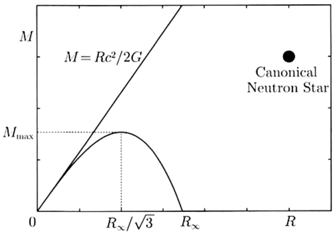


図 1　式 (2) から得られる質量–半径関係．$M_{\max} = R_\infty c^2/3\sqrt{3}G$．標準的な中性子星（canonical neutron star）の位置を黒丸で示した．直線 $M = Rc^2/2G$ の左側は禁止領域．

と書ける．ここで σ は Stefan–Boltzmann 定数である．この式に観測された T^∞ と L_X^∞ の値を代入することによってこの球体の半径を引き出すことができる．しかし遠方の観測者が実際に観測する放射率 L_X^∞，温度 T^∞ は真の放射率，温度ではなくて重力の影響を受けて赤方偏移したものであり，このとき式 (1) を用いて引き出される放射半径 (radiation radius) R_∞ も真の半径 R から赤方偏移因子だけずれている．

$$R_\infty = R/\sqrt{1 - R_S/R} \tag{2}$$

ここで $R_S = 2GM/c^2$ は質量 M の天体の Schwarzschild 半径で，たとえば太陽質量に対しては $R_S(M = M_{\rm sun}) \sim 3\,{\rm km}$ である．それゆえ観測値は真の半径を与えるのではなくて，半径と質量の間の関係（3 次式）を与える（図 1）．

観測値を用いて得られた R_∞ は，$R_\infty = 5.8 \pm 1\,{\rm km}$ であった．この大きさは典型的な中性子星の半径である 10 km と比べると非常に小さいところから次に述べるようにクォーク星ではないかというのが彼らの結論である．

3. 非閉じ込め転移とクォーク物質の状態方程式

クォーク模型が提出され，QCD（量子色力学）が確立された 1970 年代高密度領域でのクォーク物質の状態方程式がくりこみ群のスキームを利用しながら摂動的に計算された．その前提となるのは摂動的真空と呼ばれる非閉じ込め相の真空であり，一方クォークがある広がった領域に閉じ込められたハドロンが存在する真空は非摂動的真空である．最近の格子ゲージ理論による数値計算により有限温度（T）の下での非摂動的真空から摂動的真空への非閉じ込め転移が精力的に調べられており，相転移の次数はおよそ 1 次でその臨界温度は $T_c \sim (150\text{–}175)\,{\rm MeV}$ と見積もられている[5]．物理的には温度の上昇とともに多くのハドロン（最も質量の軽い π 中間子が主成分）が真空から熱的に励起され，それらの粒子密度が十分大きくなったときハドロンの広がりが重なり合って相転移を起こすと考えられる．この状況は初期宇宙でのクォーク–ハドロン物質相転移や超相対論的原子核衝突過程で期待されているクォーク・グルオンプラズマ状態と関係している．

次に，本稿に最も関係深い有限のバリオン数密度を持ち温度が実質的に零と考えられるハドロン物質での非閉じ込め転移を考えてみよう．上述した有限温度の場合と同様にハドロンは摂動的真空とクォークからなるある広がりを持つ粒子であり，非摂動的真空の中に分布しているので，数密度が十分に大きな状況では非閉じ込め転移が起こると考えるのが自然である．しかしながらこのようなバリオン数密度が非零の場合の非閉じ込め転移を格子ゲージ理論に基づく数値計算によって調べるのは非常に困難であることがわかっており，現在のところ臨界密度（$\rho_{\rm dc}$）などの情報は得られていない[6]．

そこでクォーク物質に関する多くの考察は MIT バッグ模型を基礎に行われている[7]．MIT バッグ模型はバッグと呼ばれるくっきりした境界を持つ有限領域の中にクォークを閉じ込めたものとしてハドロンを表す．このときバッグの内部は摂動的真空であると考え，外部の非摂動的真空とのエネルギー密度の差をバッグ定数と呼ばれるパラメーター B で表すのが特徴である．またバッグ内部のクォークは QCD による相互作用（クォーク–グルオン結合定数 α_c）をしながらもほぼ自由に運動していると考える．現象論的にはこの模型によってハドロンの質量スペクトルがよく再現されることが知られている．いま，MIT バッグ模型を用いて与えられたバリオン数密度 ρ_B のクォーク物質のエネルギー密度 ϵ を最低次の摂動（$O(\alpha_c)$）で計算すると

$$\epsilon(\equiv E/V) = \epsilon_{\rm kin} + \epsilon_{\rm ex} + B, \tag{3}$$

$$\epsilon_{\rm kin} = \frac{3}{8\pi^2} \sum_{f=u,d,s} [x_f \eta_f (2x_f^2+1) - \ln(x_f+\eta_f)],$$

$$\epsilon_{\rm ex} = -\frac{\alpha_c}{\pi^3} \sum_{f=u,d,s} m_f^4 \left\{ x_f^4 - \frac{3}{2}[x_f\eta_f - \ln(x_f+\eta_f)]^2 \right\}$$

と書ける．$x_f = p_{\rm F}(f)/m_f$, $\eta_f = (1+x_f^2)^{1/2}$．ここで Fermi 運動量 $p_{\rm F}(f)$ は ρ_B の関数として与えられる．

$$\rho_B = \frac{N_B}{V} = \sum_{f=u,d,s} \frac{p_{\rm F}(f)^3}{\pi^2}. \tag{4}$$

$\epsilon_{\rm kin}$, $\epsilon_{\rm ex}$ はそれぞれ運動エネルギー，および 1 グルオン交換エネルギーを表している．ここでは軽い質量の $u(m_u = 1\text{–}5\,{\rm MeV})$, $d(m_d = 3\text{–}9\,{\rm MeV})$, $s(m_s = 75\text{–}170\,{\rm MeV})$ クォークを考えた．u, d クォークからなる 2 フレーバークォーク物質と u, d, s クォークからなる 3 フレーバークォーク物質を比較すると，s クォークの質量が大きいにもかかわらず常に後者のエネルギーのほうが低くなることがわかる．これはバリオン数密度一定のままでクォークの種類を増加したことによる各 Fermi 運動量の減少とそれによる運動エネルギーの減少と，$\epsilon_{\rm ex}$ の質量依存性（重いクォークほど引力的）とによって理解できる．

クォーク物質の圧力 P は熱力学の関係式より

$$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{N_B} \tag{5}$$

で与えられるが，式 (3) の特徴として外部の非摂動的真空から及ぼされる圧力 B とクォーク物質の圧力がつりあう飽和密度 $\rho_{\rm s}$, $P(\rho_{\rm s}) = 0$ が存在することがある．もちろん非閉じ込め臨界密度 $\rho_{\rm dc}$ が存在するので $\rho_{\rm s} < \rho_{\rm dc}$ であれば飽和性という概念は意味を失う．式 (3), 式 (5) はクォーク物質の状態方程式を与え，一般相対論に基づく TOV（Tolman-Oppenheimer-Volkov）方程式

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G}{c^2}\frac{(M_r + 4\pi r^3 P/c^2)(\epsilon + P)}{r(r-2GM_r/c^2)},$$

$$M_r = \frac{4\pi}{c^2}\int_0^r \epsilon r^2 dr. \tag{6}$$

を解くことによって星の平衡形状（質量，半径等）を得る．このとき質量–半径（または中心密度）平面で一本の曲線を描くことができ，重力的に安定な部分を分枝と呼ぶ．

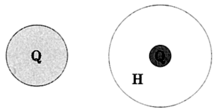


図 2　クォーク星（左）とハイブリッド星（右）．ハイブリッド星ではハドロン物質（H）とクォーク物質（Q）が混在した混合相（mixed phase）の存在が議論されている．

4. ストレンジ物質とクォーク星

パラメーター (α_c, B) の値をハドロンの質量スペクトルを説明する値にとればハドロン物質からクォーク物質への相転移は 1 次であり，非閉じ込め臨界密度 $\rho_{\rm dc}$ はおよそ $8\rho_0$ 以上となり，$\rho_{\rm s} < \rho_{\rm dc}$ が成立する．この密度は中性子星の芯においても実現が難しい．それゆえもしもクォーク物質が存在するとしても中性子星の芯の部分にわずかに存在する程度であると考えられる．このような天体はハドロン物質による圧力が主要項として重力と平衡しており，中性子星と同じ分枝に属することから，クォーク星とは呼ばず，“hybrid star” と呼ばれる広い意味での中性子星の一種である（図 2 参照）*3)．

それでは中性子星の中心密度よりさらに大きな中心密度を持つ天体を考えれば白色矮星，中性子星と続くコンパクト星の第三の分枝としてクォーク物質が主要な役割を担うクォーク星が考えられるのではないかと想像できるかもしれないが，そのような超高密度では QCD の持つ漸近的自由性によりクォークはほとんど相互作用せず超相対論的な自由気体のように振る舞いそのときの圧力は強い重力には抗し得ないことがわかる*4)．このようにしてクォーク星の分枝の存在は否定される．

1984 年一つのブレークスルーがあった．Witten は QCD の基底状態は通常の核物質またはハドロン物質

*3)　hybrid star 内部のクォーク物質とハドロン物質の境界，接触面の構造に関しては最近議論を呼んでおり，1 次相転移の結果としてクォーク物質とハドロン物質が混在する相（混合相）が広い領域にあるという指摘がある一方[7]，クーロン力の効果や表面張力の効果さらには物質内部での Debye 遮蔽の効果が顕著であり混合相は存在しにくいということも示されており決着していない[10]．

*4)　これはもっと重いクォークである c, t, b まで考えても一般的に言える．

ではなく u, d, s クォークがほぼ等量混合したクォーク物質（ストレンジ物質と呼ばれる）であるという仮説を提案した[8]．実際 Farhi と Jaffe は許されるパラメーターの値の範囲で1バリオンあたりのエネルギーが核子の質量（m_N）よりも小さくなることが可能であることを示した[8]．また無限に広がったクォーク物質ではなくてバリオン数 A が有限の塊（ストレンジレット）を考えても $A >$ 数百では1バリオンあたりのエネルギーは核子の質量以下になることが示された．このストレンジ物質仮説は原子核の安定性とは矛盾していない．その理由は，一つには数個程度の核子同士が融合したとしてもそのときの1粒子あたりのエネルギーは核子質量より大きくなること，もう一つは最初核子でできていた原子核はクォークの言葉で言えば軽い u, d クォークのみからできておりストレンジレットになるためには多くの u, d クォークを s クォークに変換する必要がある．これはストレンジネス量子数の変化を伴うので強い相互作用では無理で弱い相互作用が必要になる．例えば100個程度の s クォークを作るにも弱い相互作用の100次の摂動が必要であり，もともと結合定数が非常に小さいことを考えるとその寿命は宇宙年齢をはるかに越えてしまうのである．

いま飽和密度 ρ_s でのエネルギー密度を ϵ_s とおいて，この可能性まで含めてクォーク物質の状態方程式の特徴を場合分けすると，

(i) $\rho_s < \rho_{dc}$

(ii) $\rho_s > \rho_{dc}$, $\epsilon_s/\rho_s > m_N$

(iii) $\rho_s > \rho_{dc}$, $\epsilon_s/\rho_s < m_N$

となる．(i) と (iii) の場合を図3に比較した．

さて，ストレンジ物質の状態方程式を用いて TOV 方程式 (6) を解いてクォーク星（ストレンジ星と言われることもある）の全体的な性質を見ると，質量–半径平面で奇妙な振舞いをしていることに気がつく（図4 (iii) 参照）*5)．原点から始まるクォーク星の分枝はいくらでも小さな質量，半径を持った星が平衡状態として安定に存在することを意味している．これはストレンジ物質が飽和密度 ρ_s を持っていることによるが，この事情は原子核の場合とよく似ている．原子核も核物質の飽和性という特徴のために飽和密度 ρ_0 で圧力が零で1核子あたりの束縛エネルギーが $E/A \sim -16\,\mathrm{MeV}$ の束縛状態にあり，このため（クーロンエネルギー，表面張力などを無視すれば）任意の核子数の原子核が安定に存在し得るのである．このような系を自己束縛系と呼ぶ．それゆえ当然のことだが小さなクォーク星では重力の効果はほとんど無視できて任意の大きさのクォーク星が可能になる．質量が増加するにつれて重力の効果が効き始め，最大質量より重い星では最終的

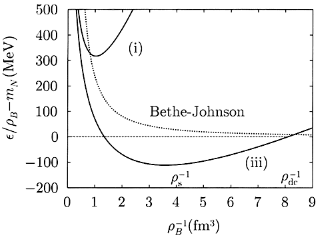


図3 クォーク物質の状態方程式の例．状態方程式は模型に含まれるパラメーター α_c, B の値によって任意性がある．(iii) の場合には飽和密度 ρ_s および $\epsilon_s < m_N$ のストレンジ物質に対応しているが，(i) の場合には $\rho_{dc} > 8\rho_0$ でハドロン物質からクォーク物質への1次相転移を示している．比較のために核物質の典型的な状態方程式の例として Bethe-Johnson（B-J）によるものを描いておく．

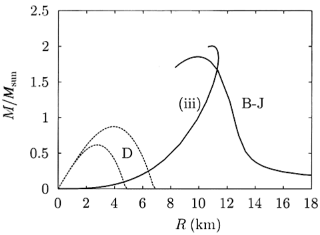


図4 クォーク星の質量–半径関係と Drake たちの観測結果（D）．このときに用いた状態方程式は図3の (iii) に対応するストレンジ物質によるものである．同じく図3に与えられている B-J の状態方程式を用いた中性子星の結果を参考のために描いておく．核力および核物質の計算にはまだいくらか不定性は残っているが，いずれも観測データから示唆される領域（D）を通過することはない．

*5) ストレンジ星の様々な様相については，例えば参考文献 9) を見て下さい．

に重力的に不安定になる．

図4にはクォーク星の分岐とともに観測値から示唆される領域，核物質の一つの状態方程式であるBethe-Johnson（B-J）による中性子星の分枝が描かれている．注目したいのはクォーク星の分枝は定性的に中性子星の分枝とは異なっており，上述した特徴的な振舞いのために常に観測値の範囲を横切ることである．それゆえ模型に含まれるパラメーターの値に依存せずに観測値を説明することができることが重要である．

5. QCDにおける凝縮系物理

クォーク星が存在するとすれば，それはどのようにして誕生するのか，クォーク物質の性質はどのようにクォーク星の振舞いに反映するのか，という問題がある．

前者に関しては，超新星爆発後に中性子星が残されるように，星の進化の最終形態として誕生するのではないかと考えられたり，中性子星の重力崩壊の過程でブラックホールにならずにクォーク星に変身していくのではないかと考えられたりしている．いずれにしても初期状態はハドロン物質でそれがクォーク物質に変化することになる．そこでどのようにハドロン物質からクォーク物質に転化するのかという問題が重要になるが，たとえ終状態のクォーク物質のほうがエネルギー的に低く安定であったとしても，既述したように巨視的な大きさのハドロン物質が一挙にクォーク物質に転化することは難しい．そこで，小さなストレンジレットが何らかの結果でハドロン物質内に生成されたと考えてみる．それはハドロン物質の一部が$\rho_{\rm dc}$の密度を越えたり，また外部から飛来したとしてもよい．するとそのストレンジレットはほぼ等量のu, d, sクォークを含んでいるが，sクォークの質量が重いために電気的に正に帯電しクーロン障壁を持っている．しかしいま考えているハドロン物質は中性子が主要成分なので，中性子は容易にストレンジレットと融合できる．中性子中のu, dクォークは

$$u(d) + d \longrightarrow u(d) + s \qquad (7)$$

の反応によってすぐにsクォークを作ることができる．この反応は発熱反応である．このような反応を繰り返すことによってハドロン物質は燃えていき最後にストレンジ物質を残すことができる．

クォーク物質の性質がどのようにクォーク星の振舞いに関与するのかという問題も重要である．これまで状態方程式との関連でクォーク物質はQCDの漸近的自由性のために相互作用が小さくほぼ相対論的自由気体のように振る舞うことを強調してきたが，最近のクォーク物質の研究で物理はそれほど単純ではないことがわかってきた．すなわち，クォーク物質の“物性”という側面から見ると超伝導，超流動性や磁性について面白い様相を持つのではないかと考えられ，高密度QCDとかでの凝縮系物理と呼ばれている．これらの物理については本誌の特集号[11]を参照していただくことにする．これらの物性はクォーク星の熱的進化，回転の性質，磁場の様相と関係している．

6. おわりに

今回のクォーク星候補天体の報告はX線の放射スペクトルを基礎に行われたが，もしもその質量–半径の関係式が中性子星のものと定性的に異なるのであれば，パルサーの回転速度を測定することによっても観測できるかもしれない．現在知られているパルサーの最小の周期Pは1.6 msecだが，もしもクォーク星が磁場を持ち高速で回転しているパルサーになっていればmsec以下の周期を持つことが可能になる．一方現在知られている中性子星の状態方程式では0.5 msec以下の周期を持つことはできないことがわかっている．

1932年Chadwickによる中性子発見の報を聞いて，コペンハーゲンにいたLandauは直ちに“中性子星”のアイデアを述べ，1934年BaadeとZwickyによって超新星爆発後に中性子星が形成されるシナリオが提出されるが，その当時“中性子星”はエキゾチックなものと考えられ，もっと真剣に議論されていたのは既述したhybrid starのように，太陽のような普通の星の中心部での中性子芯の存在可能性であった[*6]．それ以後中性子星の内部構造や熱的進化（中性子星の冷却）に関する理論的研究が続けられ約30年後の1967年Bellらによって電波パルサーとして中性子星が発見されることになるが，10^{12}Gという強磁場を伴って周期1 secという高速回転するパルサーとして発見されるであろうとは誰も予想できなかった．

*6) 実際Landau自身もそのように考えていたようである[12]．

このような中性子星の存在が確認されるまでの歴史を振り返ってみると，クォーク星にまつわるこれまでの研究の歩みに似た側面があることに気づく．1970年代にクォーク模型，QCDが提出されてすぐにクォーク星のアイデアは考えられたが，現在のところはクォーク物質が中性子星の芯の部分にあると考えることが多く，クォーク物質が本質的に内部の全領域を占めるクォーク星はエキゾチックなものと考えられている．今回のクォーク星候補天体発見の報はその意味で我々の想像力を刺激している．

なお中村，浅川，武藤氏には本稿を書く上でいろいろと助言をいただいたのでここに感謝します．

参考文献

1) J.J. Drake et al., *ApJ* **572** (2002) 996.
2) P. Slane, D.J. Helfand and S.S. Murray, *ApJ* **571** (2002) L45.
3) S. Tsuruta, M.A. Teter, T. Takatsuka, T. Tatsumi and R. Tamagaki, *ApJ* **571** (2002) L143.
4) 中村卓史，物理学会誌 **57** (2002) 596.
5) F. Karsch, E. Laermann, A. Peikert, *Nucl. Phys.* **B605** (2001) 579.
6) Z. Fodor and S.D. Katz, *JHEP* **0203** (2002) 014. C.R. Allton et al., *Phys. Rev.* **D66** (2002) 074507.
7) N.K. Glendenning, *Phys. Rep.* **342** (2001) 393; *Compact Stars* (Springer-Verlag New York, 1997).
8) E. Witten, *Phys. Rev.* **D30** (1984) 272; E. Farhi and R.L. Jaffe, *Phys. Rev.* **D30** (1984) 2379.
9) K.S. Cheng, Z.G. Dai and T. Lu, *Int. J. Mod. Phys.* **D7** (1998) 139.
10) D.N. Voskresensky, M. Yasuhira and T. Tatsumi, *Phys. Lett.* **B541** (2002) 93; *Nucl. Phys.* **A** (2003) in press (nucl-th/0208067).
11) 特集「物質とは何か」数理科学 3 月号 (2001).
12) L. Landau, *C.R. Acad. Sci. URSS*, **17** (1937) 305; *Dokl. Acad. Nauk. SSSR.* **17** (1937) 301.

（たつみ・としたか，京都大学大学院理学研究科）

物理学とは何か

第9回　物理と宗教

戸田盛和

1. スピノザの神

物理学でデカルト（Descartes, 1596–1650）について語ることは少ないが，考えてみると我々の知識の中にはデカルトに負うものが非常に多い．おそらく彼の言葉で一番有名なのが「我思う．故に我あり」と訳されている言葉（コギト・エルゴ・スム）であろう．これはラテン語で書かれた『方法序説』（理性を正しく導き，もろもろの学問において真理を求めるための）の中に出ているが，訳しにくい言葉らしい．この訳だと「考えの浅い人は生きていないのも同然」などと誤解されかねない．デカルトが言いたいことを意訳すれば，「考えつつある私がここに存在することだけは疑えない」ということだろう．

デカルトの時代には，中世のスコラ学者などによる莫大な量の論考の蓄積があったが，その多くは不確かな知識であると彼は考え，そのすべてを疑うことから始めなければならないとした．そのとき，そのように考えている自分というものが存在することだけは疑えないことに気づき，これをデカルトは出発点（第一原理）としたのであった．こうして中世と決別した近世が生まれ，その近世哲学の父がデカルトということになる．

デカルトは解析幾何学の創始者としても知られている．彼はまた力学の法則を自然の基本法則と考え，自然は機械であるという機械論的自然観を樹立した．また宇宙の根本原理を精神と物質の二実体によるものとするデカルトの二元論（物心二元論）はその後の哲学に大きな影響を与えた．

デカルトの二元論では，動植物は心をもたない機械とされ，人間だけが精神と物質からなる二元的なものとされるようであるが，意識や自由意志などの説明においても二元論が重大な困難をもつことは明らかである．これを避けるには精神と物質をある一元的なものの二つの属性とする一元二属性論か，あるいは世界が互いに独立な多くの根本原理から成り立っているとする多元論をとるかということになるだろう．

デカルトの考えを徹底させて一元二属性論を唱えたのはスピノザ（Spinoza, 1632–1677）であると言われている．スピノザは，オランダのユダヤ教団に属していたが，無神論者として破門され，最後にはレンズを磨くことで生計をたてながら哲学に没頭した．

デカルトは自然を成り立たせている実体は精神と物質の二つであると考えて全自然を合理的に理解しようとしたが，これに対しスピノザは精神も物質も元をただせば神すなわち自然という一つの実体であるとした．神は精神や物質のほかにも無

限に多くの属性をもつが，人間はこの二つの属性しか知ることができない．こういうのがスピノザの考えであった．この神はいわば汎神論の神である．

昔，大学生であった頃，『世界大思想全集』（春秋社）という茶色の表紙の全集があって，その中のニュートンの巻とスピノザの巻とをもっていた．ニュートンの巻は『プリンシピア』であって，これは読みやすかったが，スピノザの巻は読んでもよくわからなかったし，書名も確実には覚えていない．スピノザの主著は『エチカ』（あるいは『幾何学的方法にもとづく倫理学』）というものだが，私のもっていた訳書はそういう書名ではなかったような気がする．

『神は老獪にして…アインシュタインの人と学問』によれば，アインシュタインは若いときからスピノザを読み，生涯にわたって哲学に興味を抱いた．この本によれば1946年頃にアインシュタインは次のように述べている（これは量子力学に対する彼の不信を述べたものらしい）．

「スピノザはわれわれの時代より300年前に生きた人であるが，彼が対処しなければならなかった精神状況は，われわれ自身の状況と格別よく似ている．その理由は，自然現象の因果的な関係についての知識を集積する努力がまだそれほど成果があがっていなかったときに，彼は厳然として，すべての現象の因果的発展に確信をもっていたからである」

また，ヨルダン著『アインシュタインの思想』（林憲二訳，東京図書）の最後の章には次のような記述がある．

「第1次世界大戦が終わったあと，アインシュタインが政治的な敵意の真只中に陥っていた頃，…その様子がアメリカにも届き，その地の枢機卿はアインシュタインの無神論的教義を公に戒めた．ニューヨークのゴルトシュタイン師はアインシュタインに一通の電報を打った．『あなたは神を信じるか？』．アインシュタインは返信してきた．『私は，すべての存在との調和が証示されているスピノザの神を信じるが，人類の運命と行為に係わり合う神は信じない』．この回答のもつ古典的な簡潔さと明晰性は，いかに深刻にアインシュタインが真理の認識，自然法則を求める精神的な努力を神を敬う一つの直観形式と感じていたかを示すものである．…」

アインシュタインの言うスピノザの神はわからないでもないが，正直なところ，神，仏，宗教，哲学，形而上学のはっきりした区別について納得できるところまで深く考えたこともない．そしてこれは日本人の一般的な気持なのではないかと思う．日本人は無宗教とは言えないだろう．むしろ多神教，アニミズム，あるいは古代からの原始的な信仰に近い気持ちの人が多いと言ってよいだろう．キリスト教などのように唯一の神を信仰するのでは，ほかの神や仏に申し訳ないような気もする．

伊勢神宮にお参りしたこともあるし，出雲大社にもお参りした．新年には明治神宮やそれぞれに家の近くの神社や寺院へ年賀に訪れる人が多い．私も近くの八幡神社へお参りに行ってお札をもらってきたりする．しかし，私は特に八幡太郎義家に会いに行くわけではないし，武道の神に詣でるつもりでもない．考えてみれば世のならわしに従っているにすぎないのか，あるいは我々すべてを生かしてくれている世の中や自然界というものを改めて思う気持ちからなのだろうか．新年近くになってもう少し静かに考えてみたいところであるが，師走の頃は何かと忙しいことに明け暮れするのが残念である．

2. 階層（レベル）のちがい

スピノザの思想では，すべての原因として永遠で絶対的な神が唯一の実体であり，すべては厳密な必然に従って生起する．

この決定論によれば，人間の自由意志などはあり得ないことになる．自由意志，自己意識，自我，決心，悩みなどは互いに関連していると思われる

が，これらはすべての人の抱く幻影にすぎないのであろうか（前回で自由意志と決定論の関係について同じことを言った覚えがある）．

たとえばある人が紅茶にするか，コーヒーにするかを選択するとしよう．この場合，彼が自由意志を行使したかどうかを科学的に証明することができるだろうか．この証明をするには，選択前における宇宙内のすべてのもの（脳も含めて）の状況をまったく同じにして選択を繰り返し，その結果から何らかの結論を導き出さなければならないが，これを導き出すには何らかの理論が必要であるにちがいない．しかし我々にはこの理論をもたないから，自由意志があるかないかを結論づけることはできないことになる．

自己意識や感情，あるいは宗教心などの問題にはそれぞれの特徴があるにしても，心や感覚と物理的な現象とが接する事柄については共通した面が存在するように思われる．それはしばしば言われるように，精神や心の世界が物理的な世界と階層を異にするということである．階層はレベルとか，範疇などとも呼ばれる．

物理学においてもいくつかの階層があり，我々はいろいろな階層あるいはレベルで世界を論じている．

たとえば一方の端に物理学の基本法則（クォークとか，統一的な力とか）がある．それから原子・分子の物理学がある．さらに熱・結晶・相転移などのいわゆる熱力学と物質の世界があり，これより上（上下，高低で区切るのは便宜的であるが）には流れや波の世界や気象学の世界があり，地球の科学，太陽系の科学，太陽と星の科学，銀河と宇宙の科学などがつらなっている．他方では高分子の科学，生物の科学，そして人間，社会，歴史，経済，政治，あるいは善，悪，美，慈悲，愛，宗教などのレベルがある．精神や心もその一つのレベルである．

大きな知的努力を傾けて，我々は，歴史を人の心理に，人の心理を脳の働きに，脳を神経パルスに，神経パルスを化学に，化学を物理学に，というふうに重なった階層の間を結びつけて明らかにしようとしている．知的解明が上記のような階層に分かたれているのは，多分に人間の感覚器官や人間的尺度と関係があるように思われる．ニュートン力学は太陽系の観測から始まった．光学は眼の，音響学は音の感覚に基づいている．原子や分子は眼に見えないので原子分子の科学は長い間疑われた．いずれにしても我々はいくつもの階層をもちそれぞれの中で通用する言葉（概念）をもつ．



図１　自然界の階層構造．

自然現象を目的論的に解釈しようとする思想もあるが，科学的な努力は，階層の中の概念をその下の階層の概念で説明しようとする．たとえば，原子を電子，陽子，中性子といった素粒子レベルで解明し，陽子，中性子をさらにその下のクォークによって説明しようとする．この試みは純粋に物理的な階層どうしの間では成功しやすいが，いつも成功するとは限らない．生物も原子・分子からできているが，生物に特徴的な概念である生命・組織・心というような概念を原子・分子のレベルで説明することはできていない．生命・組織・心といった概念は原子・分子に「還元」できない「全体論的」（ホーリズム的）な概念である．

熱力学は基礎的な物理学の中で唯一つの全体論的な体系である．放置された物体はすべて散らばり，一様になっていくというエントロピー増大の法則，すなわち熱力学の第2法則は，熱的現象というより，物理系にも生物系にも成り立つ普遍的な法則である．そしてエントロピー，圧力，仕事，温度といった概念は個々の分子レベルでは意味がない概念である．そして純粋に熱力学的な思考ではこれらの概念を完全にマクロ的に定義して熱力学を完結させせることができる．そういう意味で熱力学は全体論的な体系である．

19世紀末から20世紀初頭にかけて高名な物理学者マッハ（Mach, 1838–1916），化学者オストワルト（Ostwald, 1853–1932）らが，実証主義の立場（存在することが実証されないものを理論にもち込むのは邪道であるとする立場）からボルツマンの原子説に強く反対した．この論争は特に有名であるが，自然科学の歴史には，ある時期に荒唐無稽と思われていた事柄が後には広く万人に認められるという場面が数多く存在する．地球が宇宙の中心であるという天動説が太陽中心の地動説によって置き換えられたように，昔の教会は将来の科学によって覆される恐れのあるような命題で科学と争うことが何度もあった．しかし教会だけでなく，物理学や化学においても，上記の原子論の否定のような誤った考えが流行することも起こり得る．

少し脱線したようであるが，我々は熱力学を例にして階層（レベル）の話をしていた．ある階層に属する概念をその下の階層の言葉で説明しようとする試みは成功するとは限らない．

たとえば温度という概念は熱力学において基本的なものであるが，その下の階層において1個の原子の温度という概念はない．強いて言えばこの階層においては温度は多数の分子の統計集団を特徴づけているパラメーターの一つである．

もっと深刻なのは時間の不可逆性であろう．熱力学では放置された物体の温度は一様になっていき，これがひとりでに元へ逆行することはないし，放置された体系のエントロピーは必ず増大する．つまり熱力学の階層における変化は時間的に不可逆である．これに対し，その下の階層，すなわち原子・分子の世界における運動は時間的に可逆である．なお熱力学以上の階層に属する生物，歴史などの世界がすべて時間的に不可逆であることも特筆に価する．一般的に言って上の階層は下の階層よりも複雑であり，このことが不可逆性の原因であると考えられる．

このように，階層を上がるにつれて，それより下の階層の要素に還元できない概念が現れる（こういうことがなければ階層を区別する意味がないとも言える）．階層構造は常に人智を超える複雑さ，精妙さをもっているのである．

ここで『ファインマン物理学 IV』（戸田盛和訳，岩波書店）からファインマン（Feynman）の含蓄に富む言葉を引用したく思う．「粘性のある流れ」の章からの一節である．

「…方程式を書いたからといって，流体の流れから魅力，あるいは不思議さ，あるいは驚異がなくなるものではない．

唯一つのパラメーター〔レイノルズ数〕をもつ簡単な〔ナビエ・ストークス〕方程式がこのような多様さをもつとすれば，もっと複雑な方程式ではどのくらい多様さが可能であるかわからない．…いわれなく物理学をおそれる人達は生命の方程式を書くことができないということが多い．おそらく，これを書くことができる．実際，量子力学の方程式

$$H\psi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

を書けば，おそらく，これは十分な近似でそういう方程式になっているであろう．方程式の単純さにかかわらず複雑なことが全く容易に，劇的に起こってしまうのを見てきた．簡単な方程式の含蓄さを知らずに，世界の複雑さを説明するのには，単なる方程式ではなく，欠けることのない神が必要であると結論した人も多い．

…このように簡単な原理から，無数の現象の変化，すばらしさが生まれてくることを再び思い出し，よろこび，驚きたいと思う．科学をテストするのは予想する能力である．もしも地球を訪問したことがなかったとすれば，雷雨，火山，大洋の波，オーロラ，色彩に満ちた日没を予想することができるであろうか．…
…現在の我々はシュレーディンガー方程式が蛙や作曲家や道徳を含んでいるか，あるいは含んでいないかを見抜くことができない．これを越える神のようなものを必要とするか，そうでないのかということも断言できない．そこで，どちらでも強く主張し得るわけである」

人間が数学によって自然を理解するのはたいへん不思議なことである．数学の多くの分野は「物理学」がそれを必要とするよりも前に純粋な「数学者」によって創造されたものである．

このようなことを考えると，物質界の法則と我々の数理的な活動の両方を結びつけている“あるもの”があるのではないかという結論が避けがたいようにも思えてくる．それを「神は数学をなさる」というような表現で表わす人もある．もう一つの考え方は自然数を含めて数学も物理学の法則とともに自然界にもともとあるものであるということかもしれない．我々は自然界を十分理解できないと同時に数式の意味を十分理解することもできない．

3. 文化と野性

昔，ジャンボ機などがまだなかった頃のことであるが，貨客船に乗ってベルギーのアントワープから日本まで 40 日以上の船旅をして帰国したことがあった．今から考えるとたいへん時間的にぜいたくな旅だった．船はスエズ運河を通り，シンガポールとマニラに寄港し，ときどきはあわただしくピラミッド見物などをしたが，そのほかは海路の日和にめぐまれてデッキ・チェアですごす時間が多かった．このときに通読したのが旧約聖書の訳本である．実はベルギー滞在中読む暇がなかったのをこういう機会もあろうかと船にもち込んだのであった．

旧約聖書は，創世記の天地創造から始まる．「神が天地を創造した…」というように万物の創造が描かれる．神は神に似せてアダムを創り，イヴを創る．しかしイヴは神に背いて禁断の実を食べたためにエデンの園を追われる．イヴの子供カインは弟を殺し，エデンの東へ追放され，やがて人間の悪が地にはびこるが，ノアだけが正しい人であった．そこで神は大雨を降らせてノアの箱舟に乗ったノアたちだけを残しすべての人を亡ぼしてしまう．その後も人は増え，増えては堕落して神に亡ぼされることを性懲りもなく繰り返す．旧約聖書には限りなく悪事を重ねる人と，これをこっぴどく亡ぼす恐ろしい神のしわざが語られる．この神によって人間は何度もほとんど亡ぼされているのである．

このことは有史以来の人間の歴史と重ね合わせて考えざるを得ない．20 世紀は相次ぐ世界大戦の世紀でもあった．第 1 次世界大戦（1914–1918）では西欧文化の没落（シュペングラー）が語られた．またこれが西欧諸国の間の最後の大戦かもしれないという人もあったらしい．それにもかかわらず 1939 年にドイツのポーランド侵攻から始まり，日本を巻き込んだ第 2 次世界大戦は 1945 年まで続いた．さらに朝鮮戦争（1950–1953），ベトナム戦争（1960–1975）があった．さらにイラン・イラク戦争（1980–1988），湾岸戦争（1990）があり，アフガニスタン，チェチェン，ユーゴなどの紛争もあって，まさにこれは戦争の世紀であった．

この間の戦争技術の進歩はすばらしいものがあった．しかもその多くが物理学的な技術の進歩であったのは大変残念なことである．その中で最も著しいのは原子爆弾の発明（1945 年）であろう．原爆廃止が唱えられ続けているにもかかわらず，現実にはじわじわと原爆は諸国へ拡散を続けている．何とも恐ろしいことである．しかも 20 世紀後半の戦争は原爆を使わない戦争技術の進歩の恐ろしさも如実に物語っている．地球の上には軍事衛星

が偵察網を敷いているし，ミサイルはいつでも発射されるのを待っている．しかしこの恐ろしい状況は人間が作ってしまったものである．

旧約聖書によれば，アダムがはじめて神のおきてに背いて以来，人間はその罪（原罪）を負っていると言う．原爆の発明は原罪を絶えず思い起こさせる手がかりとなるものであるとも言う．

人間はもっと高貴なものになることを目ざしていたのではなかったろうか．しかし人間は一途に高貴なものへと進まない．人間は原罪とも呼べるものを引き戻そうとする力を受けていて，これによって我々の文化は絶えず転覆させられてきたのかもしれない．人間は自分の能力と見通しによって高貴な人間的なものの達成へ進むことができるのだろうか．それとも動物的存在へと逆戻りしてしまうのだろうか．

「他のどの時代にもまして，我々の生きる現在こそ，この問題提出の緊急性を理解することが要求される」

私の誤読でなかったら，マンフォードは『人間―過去・現在・未来』（岩波新書）の中でこのように述べている．

「なぜなら，こんにち，人間の人間らしさは，今までの時代に出あったよりも，いっそう根本的な野蛮状態へ逆転する可能性によっておびやかされているからである．たとえ文化はそれ自身，累積的傾向をもっているにしても，それを継承する過程のなかでは，各世代は，新規まきなおしに始めるのである．両親の愛情，子供の尊敬，未来へのたしかな感覚，これらがなければ，人間になろうとする努力そのものが，失敗に終わるであろう．機械じかけへの過度のもたれかかりによって，われわれの世代は，人間の人間らしさを養い育てる秘訣を喪失しはじめている．というのは共同社会の各メンバーが感受性を豊かにし，やさしさを深め，想像力を伸ばし，道徳的責任感を強くし，自己統治力をそなえ，人間の理想像を模倣し，人類の理想的実例に自分を同化させるように素質づけられる諸条件に対して，あまりにわずかな関心しか払っていないからである」

人間はギリシャ・ローマ時代やルネサンス時代のような興隆期を何度ももった．ニュートン以来の科学の時代もそういう時期の一つであったにちがいないが，今その時代はすぎ去ろうとしているのかもしれない，という予感もある．人間の発明することは明らかに人間にとって進歩であると思われるものもいろいろあるが，その反面で人間の害になることも多分に存在する．現在の物質文明は物理学と化学の発展に負うところがたいへん大きい．しかしその発達があまり急であったので，著しい弊害も生じてきた．

科学文明は若い文明である．若いということは自信とか，プライドとうぬぼれの錯綜する時期でもあり，夢想や理想が高揚する時期である．しかし夢想は儚く，理想は到達されにくく，遠くて達成するのに時間のかかるものである．あまり急激な物質文明の進歩は問い直されなければならない．

グローバリズムということも性急すぎると思う．情報の流れ，流通，交通が多量になり急速になっていくのは当然であるかもしれない．しかしその先はどうなるのだろう．食べ物についても，春夏秋冬，いつでもイチゴが食べられたりする必要はないだろう．商業などについても，過当競争による企業倫理の喪失は迷惑至極である．人口が増え，世界中が狭くなって何がいいのだろう．グローバリズムにいいことがあるにしても性急にこれを招来することがいいとはとても思えない．少なくともこれが明るい未来志向につながるとは思えない．現在の閉塞感の根本は物質文明に明るい未来志向が描けないところにある．

（とだ・もりかず）

賭けの数理と金融工学

第6回 「賭け」の数理（6）：賭けと期待値

竹内 啓

6.1 期待値の定義

これまで賭けが無限に繰り返される場合について述べてきた．ところが，この稿が全面的に依存し，たびたび引用している Shafer と Vovk の本では，有限回で賭けを終える場合を含めて，もう一つの定式化を用意しているのである．それは確率と関係なく「期待値」を定義し，それから逆にある意味の「確率」を定義して，そこからふつう確率論の教科書で述べられているような多くの定理を導き出しているのである．

そこでまず「期待値」の定義から始める．これまでと同様に，事象の系列 $E_1, E_2, \cdots$ を考え，賭ける人は n 回目の賭けにおいて，$E_1, E_2, \cdots, E_{n-1}$ の結果 ξ^{n-1} に基づいて p 個の賭け口にそれぞれ $P_j(\xi^{n-1}), j = 1, 2, \cdots, p$ の額を賭けるものとする．賭けの結果は，E_n の結果 e_n によって定まり，j 番目の賭け口について 1 単位の賭け金に対し $x_j(e_n) + 1$ の金額が得られるものとする．そうすると n 回の賭けが終わった後の賭けた人の手持ち資金額を K_n とすると，それは ξ^n および賭けの戦略 $\mathcal{P}$ に依存して

$$K_n^{\mathcal{P}}(\xi^n) = K_{n-1}^{\mathcal{P}}(\xi^{n-1}) + \sum x_j(e_n) P_j(\xi^{n-1})$$

となる．これまでこの K_n を K_{n+1} と表してきたが，ここはこのほうが便利なので変える．更にここで，P_j は正負いずれの値もとることができる．すなわちある賭け口を「売る」ことも「買う」こともできるものとする．更に，$\sum P_j(\xi^{n-1}) \leq K_{n-1}^{\mathcal{P}}(\xi^{n-1})$ という制限を外すことにする．すなわちいくらでも「借金」をして賭けを続けることができると仮定する．そうして更に $K_0 = 0$ としておく．そうすると賭けの戦略の全体が p 次元線形空間になることは明らかであろう．

ここで更に，本来の賭けとは別に事象の結果の系列 ξ に依存して価格が定まる資産 Y があるとしよう．それを $Y = y(\xi)$ と表すことにしよう（ここで $y(\xi)$

は原則として無限系列 $\xi=(e_1,e_2,\cdots)$ に依存して定まると考えてよいが，その場合可測性の議論が面倒になるので，ここでは有限の n に対する ξ^n に依存して定まるとしておく．ただし n はすべての ξ に対して一定である必要はない)．Y は負になることもあり得る．

そうするとこのような賭けの枠組みが与えられた中で，Y はどれだけの「価値」をもつであろうか．あるいはここで賭けをする代わりにこのような「資産」を買うとしたら，どれだけの価格を支払うのが合理的であろうか．実はここでこの資産は買うことも売ることもできると考える．これを価格 v で買うということは，初めに v の額を支払い，事象の径路に依存する額 $Y(\xi)$ を得ることを意味し，v で売ることは，初めは v の額を得て後に $Y(\xi)$ の額を支払うことを意味すると考える．言い換えれば，$Y(\xi)$ はこの賭けの場に設定された 1 つのデリバティブ商品と考えればよい．

そうするともしある戦略 $\mathcal{P}$ が存在して，すべての ξ に対して

$$v>Y(\xi)-K^{\mathcal{P}}(\xi) \quad \text{すなわち} \quad K^{\mathcal{P}}(\xi)>Y(\xi)-v$$

となるならば，賭けをするほうがこの資産を買うより必ず得になるから，このような価格 v は高すぎる．したがって合理的な価格は

$$v^*=\inf_{\mathcal{P}}\sup_{\xi}\left(Y(\xi)-K^{\mathcal{P}}(\xi)\right)$$

を越えてはならない．またすべての ξ に対して

$$v<K^{\mathcal{P}}(\xi)+Y(\xi) \quad \text{すなわち} \quad K^{\mathcal{P}}(\xi)>-Y(\xi)+v$$

となる戦略 $\mathcal{P}$ が存在するならば，この資産を価格 v で売るより有利になる．ところが，$K^{\mathcal{P}}(\xi)$ が線形空間になっているから，このことはすべての ξ に対し

$$-K^{\mathcal{P}}(\xi)>-Y(\xi)+v \quad \text{すなわち} \quad K^{\mathcal{P}}(\xi)<Y(\xi)-v,\quad v<Y(\xi)-K^{\mathcal{P}}(\xi)$$

となることと同値である．したがって v は

$$v_*=\sup_{\mathcal{P}}\inf_{\xi}\left(Y(\xi)-K^{\mathcal{P}}(\xi)\right)$$

より小さくては低すぎることになる．明らかに $v_*\le v^*$ であり，合理的な価格 v は $v_*\le v\le v^*$ を満たさなければならない．

そこで v^* を Y の上期待価格，v_* を Y の下期待価格と呼び

$$\bar{\boldsymbol{E}}(Y)=v^*,\quad \underline{\boldsymbol{E}}(Y)=v_*$$

と表す．$v^*=v_*$ のときは，それを単に期待価格と呼び $\boldsymbol{E}(Y)$ と表すことにする．

$Y_1(\xi),Y_2(\xi)$ を 2 つの資産とするとき，それぞれの上期待価格を $v_1{}^*,v_2{}^*$，下期待価格を v_{1*},v_{2*}，$Y_1(\xi)+Y_2(\xi)$ の上期待価格，下期待価格を $\bar{v}^*,\bar{v}_*$ と表すと

定理 1 $\bar{v}^*\le v_1{}^*+v_2{}^*,\quad \bar{v}_*\ge v_{1*}+v_{2*}$.

証明 $v_1{}^*,v_2{}^*$ の定義から任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$v_1{}^* + \varepsilon > \sup_\xi \{Y_1(\xi) - K^{\mathcal{P}_1}(\xi)\}, \quad v_2{}^* + \varepsilon > \sup_\xi \{Y_2(\xi) - K^{\mathcal{P}_2}(\xi)\}$$

となる $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ が存在する．したがって

$$\begin{aligned} v_1{}^* + v_2{}^* + 2\varepsilon &> \sup_\xi \{Y_1(\xi) - K^{\mathcal{P}_1}(\xi)\} + \sup_\xi \{Y_2(\xi) - K^{\mathcal{P}_2}(\xi)\} \\ &\geq \sup_\xi \{Y_1(\xi) + Y_2(\xi) - K^{\mathcal{P}_1}(\xi) - K^{\mathcal{P}_2}(\xi)\} \\ &= \sup_\xi \{Y_1(\xi) + Y_2(\xi) - K^{\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_2}(\xi)\} \\ &\geq \inf_{\mathcal{P}} \sup_\xi \{Y_1(\xi) + Y_2(\xi) - K^{\mathcal{P}}(\xi)\} = \bar{v}^* \ . \end{aligned}$$

$\bar{v}_* \leq v_{1*} + v_{2*}$ も同様に証明できる．（証終）

したがって，$v_1{}^* = v_{1*}$, $v_2{}^* = v_{2*}$ ならば

$$\bar{v}^* = \bar{v}_* = \boldsymbol{E}\,(Y_1(\xi) + Y_2(\xi)) = \boldsymbol{E}\,(Y_1(\xi)) + \boldsymbol{E}\,(Y_2(\xi)) \ .$$

また，次のことは自明であろう．
$a > 0$ を定数とするとき

$$\bar{\boldsymbol{E}}\,(aY(\xi)) = a\bar{\boldsymbol{E}}\,(Y(\xi)), \quad \underline{\boldsymbol{E}}\,(aY(\xi)) = a\underline{\boldsymbol{E}}\,(Y(\xi)) \ .$$

すべての ξ に対して $Y(\xi) = a$ ならば

$$\bar{\boldsymbol{E}}\,(Y(\xi)) = \underline{\boldsymbol{E}}\,(Y(\xi)) = a \ .$$

また，すべての ξ に対して $Y_1(\xi) \leq Y_2(\xi)$ ならば

$$\bar{\boldsymbol{E}}\,(Y_1(\xi)) \leq \bar{\boldsymbol{E}}\,(Y_2(\xi)), \quad \underline{\boldsymbol{E}}\,(Y_1(\xi)) \leq \underline{\boldsymbol{E}}\,(Y_2(\xi)) \ .$$

6.2「確率」

事象の系列 ξ の集合 S の「確率」は S の定義関数

$$\mathbf{1}_S(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in S, \\ 0, & \xi \notin S \end{cases}$$

の期待価格で定義する．すなわち

$$\bar{\boldsymbol{E}}\{\mathbf{1}_S(\xi)\} = \bar{\boldsymbol{P}}(S), \quad \underline{\boldsymbol{E}} = \{\mathbf{1}_S(\xi)\} = \underline{\boldsymbol{P}}(S)$$

をそれぞれ S の上確率，下確率と呼び，$\bar{\boldsymbol{P}}(S) = \underline{\boldsymbol{P}}(S)$ のときそれを S の「確率」と呼び $\boldsymbol{P}(S)$ で表すことにする．ここでふつうの意味の確率と区別するために，このような概念については常にカギ括弧つきで表すものとする．

もう一度定義に戻って S の上確率を α^* とすれば，α^* は

$$\begin{cases} K^{\mathcal{P}}(\xi) \geq 1 - \alpha, & {}^\forall \xi \in S, \\ K^{\mathcal{P}}(\xi) \geq -\alpha, & {}^\forall \xi \notin S \end{cases}$$

となるような $\mathcal{P}$ が存在するような α の値の下限と定義できる．このことは言い換えれば $K_0=\alpha$ から出発するとき

$$\begin{cases} K^{\mathcal{P}}(\xi)\geq 1, & {}^{\forall}\xi\in S, \\ K^{\mathcal{P}}(\xi)\geq 0, & {}^{\forall}\xi\notin S \end{cases}$$

となるような $\mathcal{P}$ が存在する α の下限が α^* となる．ここで $K_0=\alpha\geq 1$ ならば賭けをまったくしなければ常に $K(\xi)=K_0\geq 1$ となるから，明らかに $\alpha^*\leq 1$.

また S の下確率を α_* とすれば，α_* は

$$\begin{cases} K^{\mathcal{P}}(\xi)\geq \alpha-1, & {}^{\forall}\xi\in S, \\ K^{\mathcal{P}}(\xi)\geq \alpha, & {}^{\forall}\xi\notin S \end{cases}$$

となるような $\mathcal{P}$ が存在する α の値の上限となる．ここで $\alpha=0$ とすれば，明らかに上式が成り立つから $\alpha_*\geq 0$. したがって，$0\leq\alpha_*\leq\alpha^*\leq 1$ が成り立つ．

これまでに述べたことを用いれば，次のことが言える．S_1, S_2 を 2 つの事象とすると

$$S_1\cap S_2=\emptyset \quad \text{ならば} \quad \begin{cases} \bar{\boldsymbol{P}}(S_1\cup S_2)\leq\bar{\boldsymbol{P}}(S_1)+\bar{\boldsymbol{P}}(S_2), \\ \underline{\boldsymbol{P}}(S_1\cap S_2)\geq\underline{\boldsymbol{P}}(S_1)+\underline{\boldsymbol{P}}(S_2)\,. \end{cases}$$

$$S_1\subset S_2 \quad \text{ならば} \quad \begin{cases} \bar{\boldsymbol{P}}(S_1)\leq\bar{\boldsymbol{P}}(S_2), \\ \underline{\boldsymbol{P}}(S_1)\leq\underline{\boldsymbol{P}}(S_2)\,. \end{cases}$$

更に次のことが言える．

径路 $\xi^{n+m}=(e_1,\cdots,e_{n+m})$ を 2 つの部分に分け，$\xi_1^n=(e_1,\cdots,e_n)$, $\xi_2^m=(e_{n+1},\cdots,e_{n+m})$ とし $\xi^{n+m}=\xi_1^n\xi_2^m$ と表すとき，事象 $\xi^{n+m}\in S$ が $\xi^n\in S_1,\xi^m\in S_2$ と定義されるとき，すなわち $S=S_1\times S_2$ であるとき，次のことが言える．

定理 2 $\bar{\boldsymbol{P}}(S_1\times S_2)\leq\bar{\boldsymbol{P}}(S_1)\bar{\boldsymbol{P}}(S_2)$, $\quad\underline{\boldsymbol{P}}(S_1\times S_2)\geq\underline{\boldsymbol{P}}(S_1)\underline{\boldsymbol{P}}(S_2)$.

証明 $\bar{\boldsymbol{P}}(S_1)=v_1^*$, $\bar{\boldsymbol{P}}(S_2)=v_2^*$ とおくと，任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\begin{cases} K_n^{\bar{\mathcal{P}}_1}(\xi_1)\geq 1-v_1^*-\varepsilon, & \xi_1\in S_1, \\ K_n^{\mathcal{P}_1}(\xi_1)\geq -v_1^*-\varepsilon, & \xi_1\notin S_1\,, \end{cases} \quad \begin{cases} K_n^{\bar{\mathcal{P}}_2}(\xi_2)\geq 1-v_2^*-\varepsilon, & \xi_2\in S_2, \\ K_n^{\mathcal{P}_2}(\xi_2)\geq -v_2^*-\varepsilon, & \xi_2\notin S_2 \end{cases}$$

となるような $\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2$ が存在する．そこで $\mathcal{P}^*$ を次のように定義する．

$\mathcal{P}_t^*(\xi^{t-1})$ は $t\leq n$ のときは $\alpha_2\mathcal{P}_{1t}(\xi^{t-1})$ に一致させ，$n+1\leq t\leq n+m$ については，$\xi_1\in S_1$ のときは $\mathcal{P}_{2t}(\xi^{t-1})$ に等しく，$\xi_1\notin S_1$ のときは 0 とする．ここで $v_1^*=\alpha_1$, $v_2^*=\alpha_2$ と表すこととすると，

$(\xi_1\xi_2) \in S_1 \times S_2$ のとき

$$K_{n+m}^{\mathcal{P}^*}(\xi_1\xi_2) = \alpha_2 K_n^{\mathcal{P}_1}(\xi_1) + K_m^{\mathcal{P}_2}(\xi_2)$$
$$> \alpha_2(1-\alpha_1) + (1-\alpha_2) - 2\varepsilon = 1 - \alpha_1\alpha_2 - 2\varepsilon\ ,$$

$\xi_1 \in S_1, \xi_2 \notin S_2$ のとき

$$K_{n+m}^{\mathcal{P}^*}(\xi_1\xi_2) > \alpha_2(1-\alpha_1) - \alpha_2 - 2\varepsilon\ ,$$

$\xi_1 \notin S_1$ のとき

$$K_{n+m}^{\mathcal{P}^*}(\xi_1\xi_2) = \alpha_2 K_n^{\mathcal{P}_1}(\xi_1) > -\alpha_1\alpha_2 - 2\varepsilon$$

となるから

$$(\xi_1\xi_2) \in S_1 \times S_2 \quad のとき \quad K_{n+m}^{\mathcal{P}}(\xi_1\xi_2) \geq 1 - \alpha_1\alpha_2 - 2\varepsilon,$$
$$(\xi_1\xi_2) \notin S_1 \times S_2 \quad のとき \quad K_{n+m}^{\mathcal{P}}(\xi_1\xi_2) \geq -\alpha_1\alpha_2 - 2\varepsilon$$

となる戦略 $\mathcal{P}$ が存在する．したがって，$\bar{\boldsymbol{P}}(S_1 \times S_2)$ は $\alpha_1\alpha_2 + 2\varepsilon$ より大きくない．ε は任意の正数だから $\bar{\boldsymbol{P}}(S_1 \times S_2) \leq \alpha_1\alpha_2$.

同様にして，$\underline{\boldsymbol{P}}(S_1 \times S_2) \geq \alpha_1\alpha_2$ も証明される （証終）.

このことから，$\bar{\boldsymbol{P}}(S_1) = \underline{\boldsymbol{P}}(S_1) = \boldsymbol{P}(S_1)$, $\bar{\boldsymbol{P}}(S_2) = \underline{\boldsymbol{P}}(S_2) = \boldsymbol{P}(S_2)$ ならば，$\bar{\boldsymbol{P}}(S_1 \times S_2) = \underline{\boldsymbol{P}}(S_1 \times S_2) = \boldsymbol{P}(S_1)\boldsymbol{P}(S_2)$ となることがわかる．

「確率」については，有限回の結果によって決定されない事象，すなわち結果の無限系列 $\xi = \{e_1, e_2, \cdots\}$ に依存する事象も考えることが必要となる．すなわちこのような無限系列の集合 S に対して，その「上確率」$\bar{\boldsymbol{P}}(S)$ で $K_0 = 0$ かつ

$$\begin{cases} \liminf_{n\to\infty} K_n^{\mathcal{P}}(\xi) \geq 1 - \alpha, & {}^\forall\xi \in S, \\ \liminf_{n\to\infty} K_n^{\mathcal{P}}(\xi) \geq -\alpha, & {}^\forall\xi \notin S \end{cases}$$

となるような $\mathcal{P}$ が存在する α の値の下限に等しいと定義する．同様に，$K_0 = 0$ かつ

$$\begin{cases} \liminf_{n\to\infty} K_n^{\mathcal{P}}(\xi) \geq \alpha - 1, & {}^\forall\xi \in S, \\ \liminf_{n\to\infty} K_n^{\mathcal{P}}(\xi) \geq \alpha, & {}^\forall\xi \notin S \end{cases}$$

となるような $\mathcal{P}$ の存在する α の値の上限を S の「下確率」と呼び，$\underline{\boldsymbol{P}}(S)$ と表す．

そうすると次のことが言える．

定理 3 事象 S について，$K_1 = 1$ かつ

$$\begin{cases} \liminf_{n\to\infty} K_n^{\mathcal{P}^*}(\xi) \to \infty, & {}^\forall\xi \in S, \\ \liminf_{n\to\infty} K_n^{\mathcal{P}^*}(\xi) \geq 0, & {}^\forall\xi \notin S \end{cases}$$

となるような $\mathcal{P}^*$ が存在するならば，$\bar{\boldsymbol{P}}(S) = 0 = \underline{\boldsymbol{P}}(S)$.

証明 任意の $\alpha > 0$ に対して $K_n^{\mathcal{P}} = \alpha K_n^{\mathcal{P}^*} - \alpha$ となるように $\mathcal{P}$ をとれば，$K_0^{\mathcal{P}} = 0$ かつ

$$\begin{cases} \liminf_{n\to\infty} K_n^{\mathcal{P}}(\xi) \to \infty > 1-\alpha, & {}^\forall \xi \in S, \\ \liminf_{n\to\infty} K_n^{\mathcal{P}}(\xi) \geq -\alpha, & {}^\forall \xi \notin S \end{cases}$$

だから，このような α の下限は 0 に等しくなる．

したがって，$\bar{\boldsymbol{P}}(S) = 0$, $0 \leq \underline{\boldsymbol{P}}(S) \leq \bar{\boldsymbol{P}}(S)$ だから，$\underline{\boldsymbol{P}}(S) = 0$.　　（証終）

実は第 2 回の補助定理 1 で示したように，$\limsup K_n^{\mathcal{P}} \to \infty$ となる $\mathcal{P}$ が存在すれば，$\lim K_n^{\mathcal{P}} = \liminf K_n^{\mathcal{P}} = \infty$ となる $\mathcal{P}$ が存在するから，上記の定理の条件は

$$\begin{cases} \liminf_{n\to\infty} K_n^{\mathcal{P}}(\xi) = \infty, & {}^\forall \xi \in S, \\ \liminf_{n\to\infty} K_n^{\mathcal{P}}(\xi) \geq 0, & {}^\forall \xi \notin S \end{cases}$$

となる $\mathcal{P}$ が存在すると置き換えてもよい．

6.3「確率」の例

最も簡単な例について，上記のような「確率」を求めてみよう．

貨幣を投げて表が出るか裏が出るかを当てる賭けを考える．変数 x_n を

$$n\ \text{回目の試行で} \begin{cases} \text{表が出たら} & x_n = 1, \\ \text{裏が出たら} & x_n = -1 \end{cases}$$

とする．n 回目の試行に対して賭ける金額を M_n とする．実際に $M_n > 0$ ならば表に対して M_n の金額を，$M_n < 0$ ならば $|M_n|$ の金額を裏に対して賭けることを意味するとする．そうすると

$$K_n = K_{n-1} + M_n x_n$$

となる．$K_0 = 0$ としておく．事象 S を $x_1 = 1$ となること（すなわち第 1 回目に表が出ること）とする．そうすると $\bar{\boldsymbol{P}}(S)$ は

$$\begin{aligned} &x_1 = 1\ \text{ならば}\ K(\xi) = K_1 = M_1\ \text{だから}\ M_1 \geq 1-\alpha, \\ &x_1 = -1\ \text{ならば}\ K(\xi) = -M_1\ \text{だから}\ -M_1 \geq -\alpha, \\ &\text{すなわち}\quad 1-\alpha \leq M_1 \leq \alpha \end{aligned}$$

となるような M_1 が存在する α の下限となるから，明らかに $\bar{\boldsymbol{P}}(S) = \alpha^* = 1/2$ となる．

同様に，$\underline{\boldsymbol{P}}(S)$ は

$$\begin{aligned} &x_1 = 1\ \text{のとき}\ M_1 \geq \alpha - 1, \quad x_1 = -1\ \text{のとき}\ -M_1 \geq \alpha, \\ &\text{すなわち}\quad \alpha \leq -M_1 \leq 1-\alpha \end{aligned}$$

となる M_1 が存在する α の値の上限となるから，$\bar{\boldsymbol{P}}(S) = \alpha_* = 1/2$ となる．

したがってこの場合

$$\boldsymbol{P}(S)=\bar{\boldsymbol{P}}(S)=\underline{\boldsymbol{P}}(S)=1/2\,.$$

すなわちこの場合は「確率」が定められる．

また定理 2 を利用すれば，ε_i が ± 1 の値をとるとするとき

$$\boldsymbol{P}\{x_1=\varepsilon_1,\cdots,x_n=\varepsilon_n\}=2^{-n}$$

となることがわかる．

すなわちこの場合には，「確率」はふつうの「表が出る確率が 1/2 のベルヌーイ系列」と定義される確率分布と同じものとなる．

またここで，x_n が $r>0$ または -1 をとる変数とすると，上記と同様の議論により

$$\bar{\boldsymbol{P}}(x_n=1)=\underline{\boldsymbol{P}}(x_n=1)=1/(r+1)$$

となることがわかる．貨幣を投げて表が出れば賭け金が $(r+1)$ 倍になる賭けにおいて，表が出る確率がちょうど $p=1/(r+1)$ のとき期待値は 0 になるから，これは自然な結果である．

6.4 大数法則

「期待価格」についていくつかの性質を述べ，それを用いて「確率」についてのいくつかの命題を導こう．x_n を任意の賭けの結果として

$$K_n=K_{n-1}+x_nM_n,\quad n=1,2,\cdots$$

とすると

$$\boldsymbol{E}(x_n)=0,\quad n=1,2,\cdots$$

は明らかである．なぜならば $M_n=1, M_i=0, i\neq n$ とすれば，常に

$$K_n(\xi)=x_n\geq x_n-0$$

となるから，$\bar{\boldsymbol{E}}(x_n)\leq 0$．他方，$M_n=-1$, $M_i=0, i\neq n$ とすれば，常に

$$K_n(\xi)=-x_n\geq 0-x_n$$

であるから，$\underline{\boldsymbol{E}}(x_n)\geq 0$．$\bar{\boldsymbol{E}}(x_n)\geq\underline{\boldsymbol{E}}(x_n)$ だから，$\bar{\boldsymbol{E}}(x_n)=\underline{\boldsymbol{E}}(x_n)=0$．

同様に，$n\neq m$ のとき $\boldsymbol{E}(x_nx_m)=0$ であることが示される．

任意の $y(\xi)$ に対して $\boldsymbol{E}\left(y(\xi)\right)=\mu$ が存在するとき

$$\bar{\boldsymbol{E}}\{(y(\xi)-\mu)^2\},\quad \underline{\boldsymbol{E}}\{(y(\xi)-\mu)^2\}$$

をそれぞれ，その上分散，下分散と呼び，$\bar{\boldsymbol{V}}(y(\xi)),\underline{\boldsymbol{V}}(y(\xi))$ と表すことにする．2 つが一致すれば分散と言い，$\boldsymbol{V}(y(\xi))$ と表す．

定理 4 $\bar{\boldsymbol{V}}(x_1)=\bar{\sigma}^2<\infty$ のとき $S_N=x_1+x_2+\cdots+x_N$ とおくと

$$\bar{\boldsymbol{V}}(S_N)\leq N\bar{\sigma}^2 .$$

証明　$\boldsymbol{E}(x_n)=0,\ n=1,2,\cdots,N$ だから $\boldsymbol{E}(S_N)=0$.

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{V}}(S_N) &= \bar{\boldsymbol{E}}({S_N}^2)=\bar{\boldsymbol{E}}({x_1}^2+\cdots+{x_N}^2+2x_1x_2+\cdots+2x_{N-1}x_N)\\ &\leq n\bar{\boldsymbol{E}}({x_1}^2)=n\bar{\boldsymbol{V}}(x_1) .\end{aligned}$$ （証終）

次の「チェビシェフの不等式」が成り立つ.

定理 5 $\boldsymbol{E}(y(\xi))=\mu,\ \bar{\boldsymbol{V}}(y(\xi))=\bar{\sigma}^2$ ならば $\lambda>0$ のとき

$$\bar{\boldsymbol{P}}\{|y(\xi)-\mu|\geq\lambda\}\leq\bar{\sigma}^2/\lambda^2 .$$

証明　$T(\xi)$ を

$$\begin{cases}T(\xi)=1, & |y(\xi)-\mu|\geq\lambda,\\ T(\xi)=0, & |y(\xi)-\mu|<\lambda\end{cases}$$

と定義すると，$\bar{\boldsymbol{P}}\{|y(\xi)-\mu|\geq\lambda\}=\bar{\boldsymbol{E}}(T(\xi))$.
常に $(y(\xi)-\mu)^2\geq\lambda^2T(\xi)$ だから

$$\bar{\sigma}^2=\bar{\boldsymbol{E}}\{(y(\xi)-\mu)^2\}\geq\lambda^2\bar{\boldsymbol{E}}(T(\xi)) .$$

ゆえに，$\bar{\boldsymbol{P}}\{|y(\xi)-\mu|\geq\lambda\}\leq\bar{\sigma}^2/\lambda$. （証終）

上の 2 つの定理を結びつければ

定理 6 任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\bar{\boldsymbol{V}}(x_1)=\bar{\sigma}^2<\infty$ ならば

$$\bar{\boldsymbol{P}}\{|S_N/N|\geq\varepsilon\}\leq\bar{\sigma}^2/N\varepsilon^2 .$$

したがって，$N\to\infty$ のとき右辺は 0 になるから

$$\bar{\boldsymbol{P}}\{|S_N/N|\geq\varepsilon\}\to 0 .$$

すなわち「大数の法則」が成り立つ.

$x_n=\pm1$ のとき ${x_n}^2=1$ だから $\boldsymbol{E}({x_n}^2)=1$. したがって $\boldsymbol{V}(x_n)=1$ であり，$\boldsymbol{V}(S_N)=N$ となる.
また，$|x_n(\xi)|\leq c$ ならば $\boldsymbol{V}(x_n)\leq c^2<\infty$ であるから，$\bar{\boldsymbol{P}}\{|S_N|\geq\varepsilon\}\leq c^2/N\varepsilon^2$ となる.

（たけうち・けい，明治学院大学国際学部）

研究室の窓

イチジク属とイチジクコバチの共進化

東　浩司・蘇　智慧・中村　桂子

様々な生物のゲノム解読が進み，DNAという生物界共通の言語を用いて比較することで地球上の生物多様性の歴史が徐々にではあるが明らかになってきた．しかし，いくらDNAを眺めてもその多様化の歴史の原動力については何も分からない．生物の多様性を生み出してきたものとはいったい何なのか？ それは様々な生物種から構成される生態系の中での生物同士または生物と環境との相互作用であろう．種間競争や広い意味での共生・共進化の結果が生物の多様性を生み出してきたと考えられる．中でも多種多様な花を咲かせる被子植物と昆虫は陸上で最も多様化した生物群であり，その多様化は植物と昆虫とが互いに相互適応的関係を築くことによって促されてきた．したがって，植物と昆虫との相互関係（対立であったり，共生であったりする）を理解することは，生物の多様性を理解する上で重要なカギの一つである．そこで，我々は植物と昆虫の共生関係の最も代表的な系と言われるイチジク属とイチジクコバチの共生関係についてDNA解析や野外調査による解明を始めた．

1. はじめに

我々が食べるイチジク *Ficus carica* は世界に約750種あるイチジク属（クワ科）の一種であり，そのほか，インドゴムノキ *F. elastica* やベンガルボダイジュ *F. benghalensis* などの観葉植物もイチジク属の仲間である．そして，これはあまり知られていないことだが日本にも十数種類のイチジク属が分布しており，どれも食用イチジクの実（正しくは花序）を小さくしたような実（花序）を付ける．「無花果」という字を見ると，あたかも花を咲かせずに実を付けてしまう植物のような印象を持ってしまうが，じつは実のように見えるものはイチジク状花序（隠頭花序）と呼ばれる花の集まり（花嚢と言う）なのだ．花嚢の内壁にはたくさんの小さい花が咲いているのだが，外からそれを見ることはできない．イチジク属と言えども植物である以上，熟す（種子を生産する）ためには受粉が必要である．しかし，花嚢中央にある開口部はたくさんの鱗片で覆われており，自然に花粉が飛んだり，運ばれて来たりして受粉することはできない．このような場合は，昆虫の力を借りなければならないわけで，事実，イチジク属の花粉運搬はイチジクコバチと呼ばれる体長2–3 mm程度の小さいハチのグループによってなされている（図1）．本稿ではイチジク属とイチジクコバチの生活史の密接な関係を紹介し，その共生関係の歴史を分子系統学的に明らかにしようとする我々の研究の現状を報告する．ちなみに食用イチジクはイチジクコバチがいなくても熟するように品種改良されたものである．

2. イチジク属とイチジクコバチの生活史

イチジク属の花には，花柱が長い雌花，花柱が短い雌花，雄花の3種類がある．これら3種類の花が一つの花嚢内に存在する雌雄同株のイチジク属を例にイチジクコバチと密接な関係を持つ生活史を述べる（図2）．

花粉を体に付けたイチジクコバチの雌は若い花嚢を見つけると（どうやって見つけるのかはまだ分かってない），鱗片が幾重にも重なった中央のすき間（穴）から強引に花嚢内に潜り込んでいく．この際，雌コバチの翅や触角はほとんどとれてしまい，もう二度と外に出ることはない．花嚢内には雌コバチが侵入する入り口付近に雄花が集まっているのだが，このときはまだ

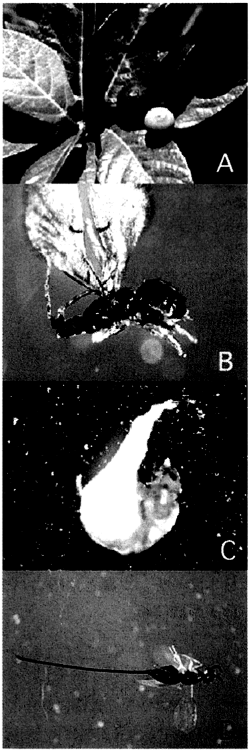


図1　日本で最も普通に見られるイチジク属の一種イヌビワとその花嚢から得られたイチジクコバチ．A：イヌビワの若い花嚢（右下）と熟した花嚢（左上）．B：送粉コバチ（イヌビワコバチ）の雌．C：送粉コバチ（イヌビワコバチ）の雄．D：寄生コバチ（イヌビワオナガコバチ）の雌．

熟しておらず，花粉を出していない．一方，花柱の長い雌花は受粉可能な状態になっており，雌コバチが外から運んできた花粉を受けとる．このとき，同時に雌コバチは産卵管を伸ばして雌花の子房に産卵しようとするのだが，雌花に対しては，残念ながら，産卵管が子房に届かず，卵を産み付けることができない．その結果，ここではイチジクの種子ができる（イチジク側の利益）．これではコバチには何の利益もないが，そこはよくできており，花柱が短い雌花の子房には産卵することができる．こちらの雌花はいわゆる虫こぶ（虫えい花）になり，コバチの幼虫は虫こぶ内ですくすく安全に成長するわけである（コバチ側の利益）．外から侵入した雌コバチはもはや外に出ることはなく，ここで一生を終える．一方，虫こぶ内で成長したコバチの幼虫はやがて蛹になり，成虫になる．最初に虫こぶの壁を破って外（花嚢内）に出てくるのは決まって雄コバチなのだが，このコバチは翅も触角もない．雄コバチはすぐに雌コバチが入っている虫こぶを探し出し，穴を開けて，腹部を差し込み，雌コバチと交尾をする．その後，やがて出てくる雌コバチが花嚢から外の世界に脱出できるように入り口の穴を大きくしたり，花嚢の壁に穴を開けたりするのだ．雄コバチの一生は容易に想像されるようにこの時点で終わりである．つまり，雄コバチは花嚢の外に出ることはなく，小さなイチジクの花嚢の中が“彼”にとっての全生涯となる．交尾後の雌コバチは虫こぶ（虫えい花）から脱出し，花嚢の外へ出ていこうとする．このときまさに，イチジクの雄花がちょうど成熟して花粉を放出しているので，脱出する雌コバチの体に花粉が付き外へ運ばれる．こうして，外へ出た雌コバチは，また新たな若い花嚢を探して入り込み，そこで新たな生活史のサイクルが始まる．

こうして，イチジク属はイチジクコバチに対して安全な産卵と幼虫の発育場所を提供し，その見返りとして，イチジクコバチに花粉を運んでもらっている．両者が共存・共生して初めて両者ともに子孫を残すことができるのである．

ここでは雌雄同株のイチジク属について説明したが，日本に分布するイチジク属の多くは雌雄異株である．この場合，雌株の花嚢には花柱の長い雌花のみがあり，雄株の花嚢には花柱の短い雌花と雄花が咲く．そして，外から雌株か雄株かを区別することはできず，雌株の花嚢に入ってしまった雌コバチは残念ながら卵を産むことはできず，花粉運びの役だけをすることになる．雄株の花嚢に侵入した雌コバチは産卵し，子孫を残すことができる．

3. 送粉コバチと寄生コバチ

野外でイチジク属の花嚢を採集し，中を見ると必ずと言っていいほど，複数種のコバチ類が現れてくる．

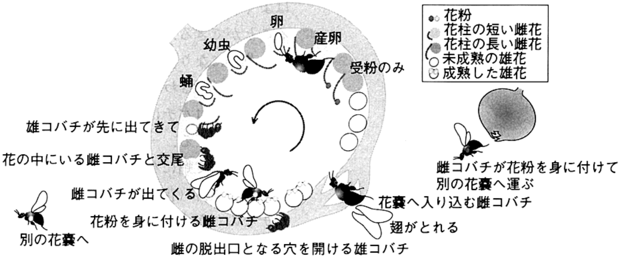


図2　イチジク属の花嚢とイチジクコバチ（送粉コバチ）の生活史（北地直子：JT生命誌研究館，原図を改変）．詳細は本文参照．

イチジク属の花粉を運ぶイチジクコバチは1種類だけだが（以下，送粉コバチとする），それ以外にも様々なコバチ類が見つかるのである．これらは総称して寄生コバチと呼ばれ，その生態はじつはよく分かっていない．特に雌雄同株であるガジュマル *F. microcarpa* やアコウ *F. superba* var. *japonica* では送粉コバチのほか，数～十数種類の寄生コバチが見られる．寄生コバチの多くは長い産卵管（体よりも長い）を持ち，イチジク花嚢の外側から壁を通して産卵するため，イチジク属の花粉の運搬には全く寄与しない（図1）．しかし，中には産卵管の短い寄生コバチも存在し，これらは送粉コバチと同様に花嚢内に潜り込んで産卵するので，花粉の運搬に全く寄与していないのかどうか，これからきちんと調べてみなければならないことだ．また，寄生コバチと言っても，送粉コバチと同様，（送粉には寄与しないが）子房を食べて成長するもの（虫こぶ形成者），送粉コバチに寄生するもの（一次寄生者），寄生コバチに寄生するもの（二次寄生者）などが存在するなど多様であり，実際のところは野外で得られた寄生コバチがどのような生活史を送っているのかはよく分からない．

分類学的にはこれらイチジクコバチ類（送粉コバチ＋寄生コバチ）は膜翅目のイチジクコバチ科 Agaonidae にまとめられ，それはさらに複数の亜科に分けられる．そのうちの一つが送粉コバチ亜科 Agaoninae で，他の亜科はすべて寄生コバチからなる．送粉コバチも厳密に言えば，イチジク属の花・種子に対する寄生者であることに変わりはなく，イチジク属（の祖先）と植食性または寄生性コバチとの対立関係の中から送粉コバチが進化してきたと考えられる．

このように，イチジク属とイチジクコバチの関係はじつは二者間だけの問題ではなく，寄生コバチを含めた三者の関係が絡み合った複雑な系である．イチジク属と送粉コバチの共生関係の進化を探る上ではこれら三者の生活史がどのように関連しているかを知る必要があるが，それについてはまだほとんど分かっていないのが現状である．

4. 日本産イチジク属と送粉コバチの分子系統解析

イチジク属と送粉コバチは密接な1種対1種の共生関係にあり，それが花嚢という閉ざされた空間で行われているため，両者はかなり厳密に共進化してきたと考えられる．その場合，両者の種分化（系統進化）は基本的に同一歩調をとるものと思われ，系統樹を作成した場合，そのトポロジー（樹形）は一致することが予想される．逆に，一致しない場合，両者の共生関係は常に厳密なものではなく，たまにはルーズになることがあることを意味しており，むしろそれはイチジク属や送粉コバチの多様化を促してきたと考えられる．そこで我々は，両者がどの程度厳密に共進化してきたのか，また，1種対1種関係はどの程度厳密なのか，さらには，どのようなストラテジーで研究を進めるべきかを探る意味も込めて，日本産のイチジク属とその花嚢から得られたイチジクコバチ（送粉コバチと寄生コバチ）の分子系統解析を行った．

イチジク属 *Ficus* はクワ科 Moraceae に属し，世界の熱帯地域（東南アジア，熱帯アメリカ，アフリカ）を中心に約750種が知られている．そのうち，東南アジ

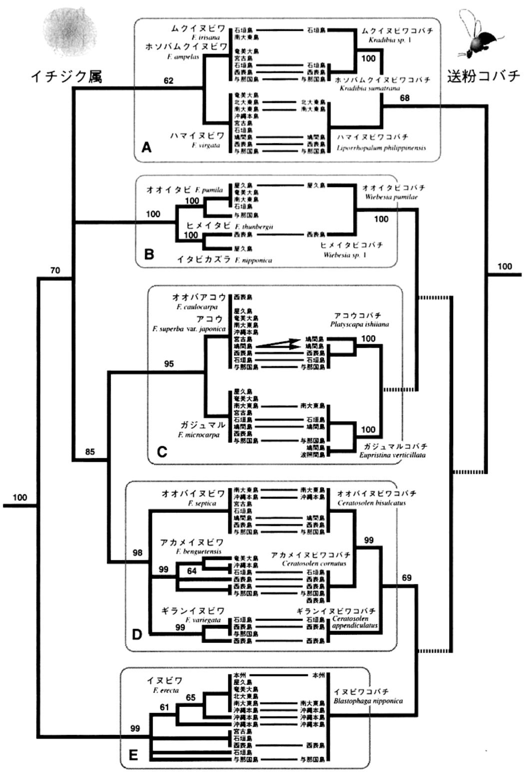


図3　日本産イチジク属と送粉コバチの分子系統樹（東ほか，原図）．左側：イチジク属の葉緑体DNAの非遺伝子領域約3800塩基の配列をもとに最節約法で解析．得られた2本の最節約系統樹の厳密合意樹．外群はクワ科の別属．数字は1000回のブートストラップ値．右側：送粉コバチの核28S rRNA遺伝子約900塩基の配列をもとにNJ法で解析し，トポロジーのみを示した．外群は寄生コバチ．数字は100回のブートストラップ値で，50%以下の枝は破線で示した．

アに約500種が知られ，日本には関東以西の西日本，南西諸島，小笠原諸島に約16種が分布している．もちろんそれらの多くは東南アジア全体に分布域を持ち，台湾やフィリピンを経由して北上してきたもので，いわば，日本はイチジク属の北限にあたる．小笠原諸島に分布する固有種3種を除くイチジク属13種について，おもに南西諸島の主要な島々でサンプルを採集した．また，送粉コバチについては11種のイチジク属の花嚢から得ることができた．イチジク属については葉緑体DNA上の非遺伝子領域約3800塩基対を決定し，送粉コバチについては核DNA上の28S rRNA遺伝子約900塩基対を決定し，系統解析を行った（図3）．

イチジク属の系統解析の結果，日本産イチジク属は5つのグループに分けられることが示された（図3左側A–E）．これらのグループのまとまりは分類学・形態学的にも支持されるものである．簡単に説明するとムクイヌビワ *F. irisana*・ホソバムクイヌビワ *F. ampelas*・ハマイヌビワ *F. virgata*（図3–A）は小高木または灌木で小さい堅い花嚢を付ける．オオイタビ *F. pumila*・ヒメイタビ *F. thunbergii*・イタビカズラ *F. nipponica*（図3–B）はつる性のイチジク属である．オオバアコウ *F. caulocarpa*・アコウ・ガジュマル（図3–C）は雌雄同株であり（他の日本産イチジク属はすべて雌雄異株），大木になり，直径8 mm程度の柔らかい花嚢を葉腋や幹に直接付ける．特にガジュマルは気根を垂らし，他の植物を絞め殺してしまう（絞め殺し植物）．オオバイヌビワ *F. septica*・アカメイヌビワ *F. benguetensis*・ギランイヌビワ *F. variegata*（図3–D）は比較的大きい葉を付け，堅いごつごつした直径2 cm内外の比較的大きい花嚢を付ける．イヌビワ *F. erecta*（図3–E）は単独で一つのグループを形成し，日本産のどの仲間と近いのか現時点では不明である．イヌビワの個体はあまり大きくならないが，花嚢は熟すと直径2 cm程度の大きさになる．ムク・ホソバムク・ハマイヌビワのクレード（図3–A）を除いてこれらのグループの単系統性は高いブートストラップ値（95%以上：グループ

まとまりの信頼性を示す値）で支持された．ムクイヌビワとホソバムクイヌビワ，アコウとオオバアコウはそれぞれ葉緑体 DNA 塩基配列に違いが見られず，遺伝的にほとんど分化していないことが示唆された．種内で塩基配列に違いが見られたのはアカメイヌビワ，ギランイヌビワ，イヌビワ，オオイタビで，特にイヌビワは沖縄本島以北のサンプルが一つのクレードにまとまり，沖縄本島と宮古島との間で分化が生じていることが示唆された．

イチジク属の花嚢から捕まえた送粉コバチの核 28S rRNA 遺伝子の塩基配列による分子系統樹を図 3 の右側に示した．中央の横棒はそれぞれ対応するイチジク属と送粉コバチのサンプルを示している．アコウコバチ *Platyscapa ishiiana* とガジュマルコバチ *Eupristina verticillata* を除いて（図 3–C），ある 1 種類のイチジク属から得られた送粉コバチの塩基配列には全く違いがないことが示された．逆に言うと，ある種のイチジク属の花嚢から複数の異なる系統群に属する送粉コバチが見られなかった．このことはイチジク属と送粉コバチがかなり厳密な 1 種対 1 種の関係を維持していることを示唆している．また，イチジク属で見られた 5 つのグループと対応して送粉コバチも 5 つのグループに分けられた．これは少なくとも近縁種間ではイチジク属と送粉コバチは共進化してきたことを意味している．しかしながら，それらグループ間の系統関係となると，特に送粉コバチの系統樹ではほとんどの枝が 50%以下のブートストラップ値を示したため，現時点では比較・考察することは困難である．もし，ここで得られた系統樹のトポロジーが正しいとすると，両者のグループ間の系統関係は明らかに矛盾しており，なぜそのようになってしまったのか興味深いところである．

日本産のイチジク属と送粉コバチの系統解析の結果を紹介したが，これは世界に約 750 種もあるイチジク属のほんの一部であり，これをもってイチジク属と送粉コバチの共進化を論じるのはなかなか難しい．現時点で分かったことは，少なくとも日本産のイチジク属については，かなり厳密な 1 種対 1 種の関係を保持していること，また，近縁種間ではイチジク属とイチジクコバチは共進化をしてきたことが示唆されたことである．さらに，イチジク属，送粉コバチともに南西諸島の島間での分化がほとんど見られないことが分かった．多くの種が分布している熱帯のイチジク属でも同じような結果が得られるかどうかは今後の課題である．

なお，コバチに関しては，現在，核 28S rRNA 遺伝子より進化速度の速いミトコンドリア CO I 遺伝子を解析中であり，今後より詳しい系統関係が明らかになると思う．

5. 送粉コバチと寄生コバチの分子系統解析

すでに述べたが，イチジク属の花嚢からは必ずと言っていいほど，送粉コバチ以外のコバチ（寄生コバチ）が見つかる．ここでは送粉コバチと寄生コバチの系統的関係について述べてみたい（図 4）．送粉コバチと同様，核 28S rRNA 遺伝子の塩基配列を用いた系統解析の結果，日本産の送粉コバチと寄生コバチに限ってのことだが，それぞれのグループは単系統群を形成し，最初に両者が分岐することが示された．送粉コバチの場合，ある種のイチジク属から得られたコバチはすべて単系統群にまとまるのだが（図 3），寄生コバチでは複数の別種と思われるコバチが 1 種類のイチジク属から得られた．寄生コバチの種の同定はほとんど進んでいないが，例えば，ガジュマルからは 12 の別種と思われる寄生コバチが得られ，それらは 7 つの系統群に分かれた（図 4）．それ以外のイチジク属の種からも複数の異なる系統の寄生コバチが得られている．このことは送粉コバチと違って，寄生コバチでは比較的簡単に宿主の転換が行われていることを示している．もしくは，塩基配列に全く違いがなく，外部形態からも同種と思われる寄生コバチが複数種のイチジク属の花嚢から得られているので，寄生コバチの宿主植物に対する認識がそれほど厳密なものではないかもしれない．これらに関しては今後さらに研究していく必要がある．

じつは，寄生コバチには長い尾（産卵管）を持つタイプと短い尾を持つ（または尾がない）タイプがある．これら 2 つのグループを系統樹上に配置してみると，送粉コバチは尾が短いタイプなので，イチジクコバチ全体としては尾が短いのが祖先的（原始的）であると考えられる（図 4）．そして，その中から尾が長いタイプが 1 回だけ進化し，さらに，再び尾が短いタイプが出現したことが見てとれる．もしくは，尾が長い系統が 2 回進化した可能性も考えられる．いずれにせよ，尾が長いタイプはイチジク花嚢の外から産卵できるため，明らかに花粉の運搬には寄与しない．一方，尾が短いタイプは産卵するために花嚢内部に侵入すると思

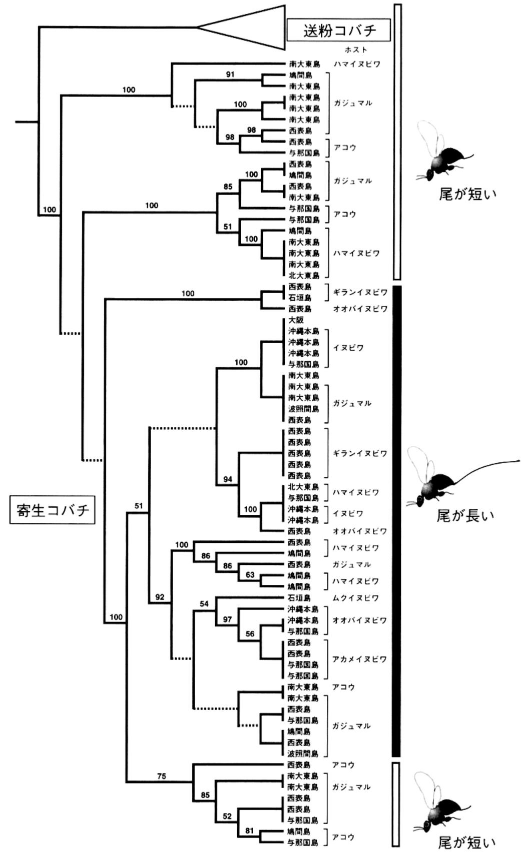


図4　イチジクコバチ（送粉コバチ＋寄生コバチ）の分子系統樹（東ほか，原図）．核28S rRNA 遺伝子約900塩基の配列をもとにNJ法で解析し，トポロジーのみを示した．送粉コバチの系統樹は図3を参照．外群は甲虫を用いた．数字は100回のブートストラップ値で，50%以下の枝は破線で示した．尾（産卵管）が短いタイプと長いタイプを区別した．

われ，これと送粉との関係はまだ定かではない．もしかしたら，ある程度は送粉に寄与しているかもしれず，イチジク属と送粉コバチの共進化機構を解明する上で，寄生コバチの生態を知ることは何か重要なヒントを与えてくれるのではないかと期待している．

6. おわりに

イチジク属とイチジクコバチとの共生関係は植物と昆虫との相互適応的関係を通しての共進化の例として有名であるが，従来はイチジクとイチジクコバチという単純な二者間の問題として取り上げられてきた感がある．しかし，実際には，じつに様々な昆虫や動物がイチジク属と相互作用しながら生態系を作り上げているのだ．つまり，生物多様性が生み出されたメカニズムを知る上での一つのモデル系と考えると新しい興味深いテーマが見えてくる．実際，送粉コバチだけでなく，数～十数種類の寄生コバチのほか，双翅目や鱗翅目の幼虫が花嚢内を食害しているのが観察されるし，鳥や多くの動物にとっても重要な食料源である．それらイチジク属と昆虫（動物）との相互関係についてはまだまだ分かっていないことが多い．送粉コバチと極めて厳密な共生系を常に維持していれば，イチジク属はどうやって700種を超えるまでに多様化してきたのだろう．多種多様な生物との相互作用を通じてイチジク属はどのようにして多様化してきたのか？ 我々はそれを野外調査とDNA解析によって解明していきたいと考えている．

（あずま・ひろし，JT生命誌研究館，京都大学大学院理学研究科）
（そ・ちけい，JT生命誌研究館）
（なかむら・けいこ，JT生命誌研究館）

特　集(2003年6月号予告)

トポロジーの新世紀

多彩な発想と更なる展開

本体952円

トポロジーの新世紀	松本　幸夫
トポロジーと非可換幾何学	夏目　利一
トポロジーからカオスへ	林　修平
離散群とトポロジー	大鹿　健一
数論と3次元トポロジー	森下　昌紀
結び目の普遍量子不変量	大槻　知忠
場の理論とトポロジー	加藤　晃史
21世紀の空間像	深谷　賢治

編集後記

今月号の特集では，〈質量〉をとりあげた．当然のことながら，これは相対性理論とも関連しているテーマである．相対論については，別冊，とくに臨時別冊・SGCライブラリのほうでもとりあげたいと，目下いろいろ思案しているところである．（平勢）

＊　　＊

人間は目で見て触れるものには“重さ”を実感できますが，人の心や幸福感といった見えないものには目方をつけられません．戸田先生は本連載で，物質文明の不安定さを危惧されていますが，何が人間にとって“重い”ことなのかを改めて考えさせられる気がします．（伊崎）

数　理　科　学　5月号

2003年5月1日発行　　発行人　森　平　勇　三

数理科学編集部
TEL. (03) 5474-8816
FAX. (03) 5474-8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

企画・編集
Staffs：平勢耕介　伊崎修通　内田晴久
Advisers：竹田　直　田島伸彦

発行所　©　株式会社　**サイエンス社**　TEL. (03) 5474-8500（代表）
〒151-0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1-3-25　振替00170-7-2387　(03) 5474-8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁

臨時別冊・数理科学

SGCライブラリ

(The Library for **S**enior & **G**raduate **C**ourses)

近年，特に大学理工系の大学院の充実はめざましいものがあります．しかしながら学部上級課程並びに大学院課程の学術的テキスト・参考書はきわめて少ないのが現状であります．本ライブラリはこれらの状況を踏まえ，広く研究者をも対象とし，**数理科学諸分野**および**諸分野の相互に関連する領域**から，現代的テーマやトピックスを順次とりあげ，時代の要請に応える魅力的なライブラリを構築してゆこうとするものです．

装丁の色調は，

数学・応用数理・統計系（黄緑），**物理学系**（黄色），**情報科学系**（桃色），

脳科学・生命科学系（橙色），**数理工学系**（紫），**経済学等社会科学系**（水色）

と大別し，漸次各分野の今日的主要テーマの網羅・集成をはかってまいります．

表示価格はすべて税抜きです

1 カオスと量子物理学
中村勝弘著　本体 1857 円

2 量子力学とは何か
高林武彦著　本体 1857 円

3 シュレーディンガー方程式
仲滋文著　本体 1790 円

4 量子コンピュータの基礎
細谷暁夫著　本体 1857 円

5 有限体と符号理論
内田興二著　本体 1667 円

6 デリバティブの数理
三浦良造著　本体 1333 円

7 複雑系経済学とその周辺
西村和雄編著　本体 1762 円

8 差分方程式講義
広田良吾著　本体 1857 円

9 生命をつくる
中野馨著　本体 1524 円

10 計算物理入門
上田顯著　本体 1381 円

11 エコノミックゲームセオリー
船木由喜彦著　本体 1429 円

12 演習 場の量子論
柏太郎著　本体 1886 円

13 複雑系脳理論
津田一郎著　本体 1429 円

14 探索のアルゴリズムと技法
伊庭斉志著　本体 1695 円

15 はじめての逆問題
チャールズ W. グロエッチュ著
大西和榮・田沼一実・山本昌宏訳
本体 1886 円

16 有限要素法による構造解析事例集
白鳥正樹・三好俊郎編著
本体 1429 円

17 基礎からの力学系
小室元政著　本体 1886 円

18 独立成分分析
甘利俊一・村田昇共編著
本体 1667 円

19 時系列解析入門
宮野尚哉著　本体 1429 円

20 物理数学ノート
佐藤光著　本体 1819 円

21 数学の未解決問題
上野健爾・高橋陽一郎・中島啓共編
本体 1886 円

22 量子論の基礎
清水明著　本体 1819 円

新刊・近刊

集合と位相への入門
ユークリッド空間の位相
鈴木晋一著
A5／168頁／本体1650円

本書は初学者を対象に主テーマをユークリッド空間にした．斯学を難しく考えず，興味や必要に応じて学べるよう工夫し，問題には詳しい解答を付けた理工系向け好個の教科・参考書である．

線形代数演習［新訂版］
横井英夫・尼野一夫 共著
A5／280頁／本体1980円

例題および各節末の豊富な問題とその詳しい解答により，線形代数学を具体的に理解するための演習書として好評を博した前著に体裁面での改訂を加え，さらなるわかりやすさを追求している．線形代数学を本当に理解しようとする人にはお勧めの一冊．2色刷．

複素関数概論
林実樹廣・長坂行雄 共著
A5／約230頁／予価2000円

関数論は純粋数学から実用的な物理学，工学まで広い応用力をもっている．本書はそれらを考慮し，半期講義用にわかりやすくまとめた．例題や問題を豊富に配置するなど，理工系向け好個の教科・参考書．

数値解析入門［新訂版］
山本哲朗著
A5／約230頁／予価2200円

種々の数値計算法の基礎を解説して好評を得てきた「数値解析入門」の新訂版．さらに幾つかの現代的数値計算法を取り上げ，解説も平易かつ厳密さを心がけた．学生，技術者，研究者に好適な教科，参考書．

物理学のための応用解析
初貝安弘著
B5／約220頁／予価1980円

学部3年前期あたりまでに習得すべき物理科学，工学において必須と考えられる数理的な処理，計算，算術の方法についてひととおり解説．数学的厳密さには拘らないながら，物理科学において通常使う分には十分と考えられる程度の説明は自己完結的に行った．

Essential物理学
阿部龍蔵著
A5／224頁／本体1700円

本書は物理学のエッセンスを分り易くコンパクトにまとめた．大学初学年級の学生が十分読み下せるよう図や問題を数多く掲載し，見開きに整理された好個の教科・参考書である．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

数学関連好評書より(3)

ベクトル解析の基礎
寺田文行・木村宣昭共著／A5／120頁／本体1250円
完全見開き形式となっているため見易く，また，図や例が豊富なので非常に理解し易いテキストとなっている．

ベクトル解析入門
阿部龍蔵著／A5／128頁／本体1200円
物理学を学ぶために必要なベクトル解析を解説している．できるだけ途中の計算を省略せず理解しやすいよう配慮した．

複素関数の基礎
寺田文行著／A5／168頁／本体1600円
左頁に解説，右頁に図やポイント，小問を配置する見開き形式で，関数論の基礎から応用まで1つ1つステップアップできる懇切丁寧なテキスト．

理工系 複素関数論
多変数の微積分から複素解析へ
柴雅和著／A5／216頁／本体1600円
実解析の復習から複素関数論を平易に解説した大学初年級向け教科・参考書・問題を通して「考え方の獲得」と「計算の練習」ができる．

基礎課程 複素関数論
占部博信著／A5／200頁／本体1600円
多くの具体例を通して，をモットーに，複素関数論の理論と応用について簡潔にしかも丁寧に解説した理工系向の恰好の教科・参考書．

改訂 関数論
洲之内治男・猪股清二共著／A5／168頁／本体1340円
好評テキスト「関数論」の改訂版．旧版の特色を保持しつつ書き改めることにより，一層の明解さをはかった．豊富な例題・演習問題が理解を助ける．

複素関数論
柴岡泰光著／A5／240頁／本体1800円
豊富な図，精選された例，多くの章末問題により，広く一般の理工系の学生から数学科の学生にまで十分に対応できる教科・参考書．

改訂 関数解析入門
洲之内治男著／A5／184頁／本体1800円
前著のコンパクトさや，応用に役立つ関数解析の基礎事項の明確な理解と十分な実力を養えるような構成を保ちつつ，改訂した．

フーリエ解析・ラプラス変換
寺田文行著／A5／112頁／本体1200円
フーリエ解析とラプラス変換を具体例や問などを豊富に用いて，各項目を見開き形式で簡潔かつわかりやすく解説．

フーリエ解析とその応用
洲之内源一郎著／A5／124頁／本体1480円
フーリエ解析を数学的厳密さを失わず平易に論じ，その応用として偏微分方程式の境界値問題の解法を中心に具体例を選びながら解説したテキスト．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

好評の数学演習書より（2）

詳解演習 線形代数
水田義弘著／A5／304頁／本体2100円
大学初年度で開講される線形代数の講義を受講しながら自らその理解を深めていくことを目的として作られた演習書．

基本演習 線形代数
寺田文行・木村宣昭共著／A5／256頁／本体1700円
基本的な問題を豊富に取り入れ，わかりやすくまとめた．大学初年級を対象とし，定期試験対策にも充分に役立つように配慮した．見やすい2色刷．

線形代数演習
横井英夫・尼野一夫共著／A5／272頁／本体1845円
線形代数学を理論面だけではなく具体的に理解するための演習書．各節のはじめに基本事項や定理を整理し，具体的な例題は頁単位にまとめてある．

基本演習 微分積分
寺田文行・坂田泩共著／A5／192頁／本体1600円
大学初年級，高専等の学生を対象とし，基本的な問題を数多く取り入れ，わかり易く丁寧にまとめた．巻末の問題解答も充実している．2色刷．

解析演習
野本久夫・岸正倫共著／A5／304頁／本体1845円
本書は，解析学の基礎の適切な例題および，その解法をとりあげることにより，読者の解析学の実力をより確かなものとすることを目的としている．

詳解演習 微分積分
水田義弘著／A5／352頁／本体2200円
例題とその後にもうけた演習問題を通して大学で学ぶ微分積分がやさしく理解できる．基本的事項も詳しく説明．2色刷．

微分方程式演習
加藤義夫・三宅正武共著／A5／240頁／本体1942円
工学への応用にも配慮して書かれた演習書．要項・例題・問題とわかりやすく構成されているので，サブテキストまたは自習書として最適である．

関数論演習
藤家龍雄・岸正倫共著／A5／275頁／本体1942円
複素関数論の基本事項に関する演習書．各節の冒頭には，その節で扱う問題に必要な定義と定理を整理し，丁寧な解説と注意を付した．

代数演習
横井英夫・硲野敏博共著／A5／232頁／本体1942円
線形代数を終えた人が，抽象代数の基本概念である群・環・体やガロアの理論を豊富な例題，基礎的・具体的問題により無理なく学べるよう配慮．

集合・位相演習
篠田寿一・米澤佳己著／A5／224頁／本体1800円
高校数学の知識で十分読める演習書．自習用としても用いられることも考慮して，解答・証明が丁寧に記されている．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

物理学・化学演習書

基礎 物理学演習I, II
永田一清編／I巻：A5／384頁／本体2400円
II巻：A5／328頁／本体2400円
物理学の基礎的事項の総合的かつ速やかな理解に重点をおいた演習書．便宜をはかり頁単位で収録．

基礎演習 物理学
加藤正昭著／A5／256頁／本体1850円
精選された例題や問題を通して，初学者でも物理の重要な基礎概念や法則などの系統的な学習ができるよう工夫のこらされた内容構成になっている．2色刷．

演習 力学
今井功ほか共著／A5／176頁／本体1456円
力学に精通し，教育面にも関心をもつ著者陣が，初学者に斯学の本質をどうやって理解してもらうかという点に特に配慮をして編集・解説した．

演習熱力学・統計力学［新訂版］
広池和夫・田中実共著／A5／248頁／本体1850円
長い間好評を得てきた旧版を，現在の教育の事情を考慮し新訂．

新・演習 電磁気学
阿部龍蔵著／A5／208頁／本体1850円
基本事項をコンパクトにまとめ，洗練された例題・問題と詳しい解説で深い理解と真の応用力が涵養できるよう工夫されている．

演習 量子力学［新訂版］
岡崎誠・藤原毅夫共著／A5／256頁／本体1850円
本書は標準的演習書として長い間好評を得てきた「演習量子力学」の新訂版．要を得た明快な解説と精選された問題により自ずと量子力学の根本が会得できるようさらに工夫されている．

演習 基礎化学
渡辺啓著／A5／176頁／本体1700円
化学の基礎をコンパクトに解説し，標準的な例題を集め，詳しい解答を付した．さらに類題を用意し，理解をより深められるよう配慮した．

演習 有機化学［新訂版］
杉森彰著／A5／256頁／本体1980円
有機化学の基本的な考え方を身につけるための演習書．好評を博した前著を，さらに容易に理解することができるよう2色刷に改めた．

演習 物理化学
渡辺啓著／A5／248頁／本体1900円
自然科学・工学の多くの領域において，その基礎となる物理化学，その習得には適切な演習の場が必要であり，本書はまさにそれを提供している．

演習 分析化学
綿抜邦彦著／A5／96頁／本体1100円
本書は，初学者にも分析化学で用いるいろいろな計算ができるように初歩の計算から導入した．例題には詳しい解答をつけた．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

Information & Computing

コンピュータと社会
田中武二著　本体 1262 円

情報の処理と活用
浦　昭二・市川照久共編著　本体 1750 円

情報処理システム入門［第 2 版］
浦　昭二他編　本体 1800 円

新コンピュータ概論
野崎昭弘著　本体 1650 円

情報処理
草薙信照著　本体 1900 円

文科系のための
コンピュータ　リテラシ［第 2 版］
Microsoft Office による
太田忠一編／植松・草薙共著　本体 2150 円

理工系ユーザのための
Windows リテラシ
皆本晃弥・森雅生共著　本体 2200 円

Windows 環境で使う
コンピュータ　リテラシ［第 2 版］
永井雅人著　本体 1550 円

Windows 環境で使う
コンピュータ入門
高島千鳥著　本体 1400 円

Windows 2000 環境で使う
情報リテラシ
東海林健二・永井明編　本体 2750 円

社会科学系のための
情報リテラシ［Windows 版］
竹田昌弘著　本体 1400 円

Windows 版
コンピュータ　リテラシ［基礎編］
植松康祐編著　本体 1200 円

Windows 版
コンピュータ　リテラシ［応用編］
植松康祐編著　本体 1200 円

実習　一太郎
柴田　博・室井勝子共著　本体 1450 円

実習 Excel
室井・鈴木・内田共著　本体 950 円

インターネット時代の書法と作法
筧捷彦監修／辰己丈夫著　本体 1600 円

コンピュータ解体新書
清水・菅田共著　本体 1500 円

CAD による**マイクロ・プロセッサの設計**
村岡洋一監修・石井吉彦著　本体 2200 円

情報数理入門
大矢雅則編著　本体 1880 円

情報数理の基礎
梅垣壽春著　本体 2300 円

計算機科学入門
アービブ他著／甘利俊一他訳　本体 2524 円

コンピュータサイエンスのための
離散数学
守屋悦朗著　本体 2400 円

アルゴリズム入門
影井清一郎著　本体 1800 円

抽象データ型とアルゴリズム
アズムーデ著／野崎監訳・仙波訳　本体 4100 円

組合せアルゴリズム
仙波一郎著　本体 2136 円

オートマトン言語理論 計算論 I, II［改訂版］
ホップクロフト他著／野崎昭弘他訳　予価各 3000 円

ファジイ理論とその応用
水本雅晴著　本体 3200 円

コンパイラ I,　II
エイホ他著／原田賢一訳　本体各 5600 円

マイクロコンピュータのための
コンパイラ・コンパイラ
レッヒェンベルク他著／玉井　浩訳　本体 3800 円

Linux／FreeBSD／Solaris で学ぶ
UNIX
皆本晃弥著　本体 2300 円

ユーザのための UNIX
鬼頭繁治著　本体 2700 円

ツールとしての UNIX
深澤良彰編著　本体 2000 円

UNIX のススメ
清水・菅田共著　本体 2200 円

QuickBASIC 入門
林・室井・鈴木共著　本体 1400 円

実習 Visual Basic
林・室井・鈴木共著　本体 1850 円

Excel VBA による
Windows プログラミング
草薙信照・青山千彰共著　本体 2000 円

Fortran 77 プログラミング
原田賢一著　本体 1650 円

改訂 FORTRAN 77
大駒誠一著　本体 1700 円

Pascal プログラミング増訂版
古郡廷治著　本体 1700 円

Pascal 入門
古郡廷治著　本体 2300 円

明解 PASCAL　国際規格（ISO）準拠
伊東・金谷共著　本体 2311 円

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

脳と心をさぐる

ニューラルネットと脳理論
アービブ『脳』第２版
M. A.アービブ著／金子隆芳訳／
A5／520頁／本体4600円
脳のメカニズムを探る．知能をもつ機能をつくる．この二つをモチーフにした定評ある『脳』の改訂版．

Q＆Aでわかる脳と視覚
人間からロボットまで
乾敏郎著／A5／232頁／本体2233円
脳と視覚の最前線の研究を題材に，Q&A形式でいま何がわかっているかなどを解説してゆく．

ギブソン 生態学的視覚論
古崎敬他訳／A5／392頁／本体4175円
「アフォーダンス」により，改めて脚光を浴びるギブソンの名著．環境の中の知覚を詳細に解説．

最新 運動と脳
—体を動かす脳のメカニズム—
松波謙一・内藤栄一共著／
A5／264頁／口絵4頁／本体2400円
科学における最後の秘境といわれる脳と運動の関係を気鋭の著者がわかりやすく解説する．

人間の言語情報処理
言語理解の認知科学
阿部純一・桃内佳雄・金子康朗・李光五共著／
A5／360頁／本体3600円
人間の言語理解のしくみの研究の最前線を紹介．

意識と脳
—心の電源としての意識—
山本健一著／A5／240頁／本体2200円
長年，臨床と研究の両面から意識の謎を追究してきた著者がその成果をまとめた意欲作．

感性の科学
感性情報処理へのアプローチ
辻三郎編／A5／224頁／本体2400円
情報科学と心理学の両面から取り組まれた学際的研究プロジェクトの成果を基に，人間の感性への科学的アプローチを紹介・解説する．

カオス的脳観
脳の新しいモデルをめざして
津田一郎著／B6／232頁／本体1750円
著者がカオス研究を通じて得た世界観に基づく脳の理論的研究と，複雑系の研究方法などを紹介．

ニューロサイエンス入門
松村道一著／A5／344頁／本体2700円
読者の予備知識を極力仮定せずに分かりやすく説きおこした最新の解説書．脳と心への多種多様なアプローチを一目で見渡せる．

映像の心理学
マルチメディアの基礎
中島義明著／B6／280頁／本体2400円
人間が情報として映像をどのように摂取しているのかをトピックスを中心として実証的データにもとづいて解説．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

既刊の好評書より

Mathematicaと MATLABの基礎

小国力著／A5／112頁／本体1300円

LATEXの基礎

小国力著／A5／104頁／本体1200円

Mathematicaの基礎と応用

分かりやすいプログラミング

小国力著／A5／240頁／本体2200円／カラー口絵4頁

Mathematicaの基本的な機能を使えることを目的とした平易な解説書.

UNIXユーザのための

トラブル解決 Q&A

皆本晃弥著／B5／176頁／本体1800円

シェル&Perl入門

bash/tcsh/grep/sed/awk/Perl

皆本晃弥・奥村浩共著／B5／280頁／本体2950円

CによるCGレイトレーシング

［カラー口絵］

千葉則茂・村岡一信共著／A5／328頁／本体2800円

３次元CGの手法を明解に解説した好著. 下記のHPより, 掲載されたプログラムをダウンロードできる.

http://www-cg.cis.iwate-u.ac.jp/lab/download/index.html

新装版 UNIXワークステーションによる

科学技術計算 ハンドブック

［基礎篇C言語版］

戸川隼人著／A5／568頁／本体3800円

アルゴリズム全部にCによるプログラムを付す.

Maple Vと利用の実際

—数式処理とCG—

小国力著／B5／216頁／本体2500円

MATLABと利用の実際」の姉妹編となる数式処理システムMaple V4の解説書. カラー口絵付.

ダイナミックシステムの統計的解析と制御［新訂版］

赤池弘次・中川東一郎共著／A5／208頁／本体2300円

不規則変動を示すシステムの計算機制御を実現するための統計的方法を具体例にそくして解説.

カオス

カオス理論の基礎と応用

合原一幸編著／A5／360頁／本体3500円

カオスの重要性への認識が広まるとともに, その"乱用"も多く見られるようになった. カオスとは一体何なのか. 本書がその研究の現状を紹介する.

左記「CによるCGレイトレーシング」をベースに, デジタル化効果を活用したレイトレーシングのデジタル教科書

デジタルメディアテクストブック「３次元CGシリーズ」—レイトレーシング法の実際—（開発：(株)ジェーエフピー）

も別売しております. **サイエンス社営業部**にご注文いただけますと**割引価格9,640円**（税・送料込）でご購入いただけます.（料金後払い）

Computing辞典

オックスフォード大学出版局刊

野崎昭弘・中川圭介・玉井浩共訳／A5／528頁／本体5800円

コンピューティングと, 数学, 論理, 電子工学等の関連分野の4500以上の用語を収録, 解説.

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

心理学関連好評書

コンパクト新心理学ライブラリ

〈監修〉 梅本堯夫・大山 正

近年，心理学に対する関心がますます高まっている一方で，大学教育をめぐる状況は大きく変貌を遂げており，授業内容はよりわかりやすくやさしく，親しみやすいものが求められています．本ライブラリは，このような時代の要請に応え，心理学の各領域のエッセンスをコンパクトにまとめ，伝えることを目的として編まれました．視覚的な理解にも配慮し，各巻2色刷・左右見開き形式による体裁としました．

5 性格の心理 ビッグファイブと臨床からみたパーソナリティ

丹野義彦著
四六／264頁／本体1800円

本書は，性格心理学をはじめて学ぶ大学生・短大生のためのテキストです．従来の性格心理学の理論をビッグファイブの枠組みにより再編成しました．また，生物学・異常心理学・臨床心理学的な観点を重視し，性格の発達・測定・適応・変容についても詳しく解説しました．

主要目次 性格の記述 性格の発達 性格の測定 性格の適応 性格の変容

8 乳幼児の心理 コミュニケーションと自我の発達

麻生 武著
四六／216頁／本体1500円

他の動物に比べ，未熟な状態で生まれるヒトの子どもはどのように成長していくのでしょうか．彼らは遊びや養育者との関わりをとおして，象徴能力やコミュニケーション能力を身につけ，私たち大人と同じように世界を分かち合える存在になっていきます．その過程を中心に，就学前の子どもたちについて著者自身が長年行ってきた縦断的な観察データをもとに生き生きと解説します．

主要目次 人として生まれる ことばとしての身体 「いま・ここ」の世界を越え始める 自己と他者 広がる想像の世界

1 心理学 心のはたらきを知る

梅本堯夫・大山 正・岡本浩一共著
四六／192頁／本体1350円

2 学習の心理 行動のメカニズムを探る

実森正子・中島定彦共著
四六／224頁／本体1500円

7 教育心理学 「生きる力」を身につけるために

多鹿秀継著
四六／184頁／本体1500円

10 青年の心理 ゆれ動く時代を生きる

遠藤由実著
四六／176頁／本体1500円

ライブラリ パーソナリティ 3

ユーモアの心理学 人間関係とパーソナリティ

上野行良著
四六／208頁／本体1300円

なぜ人は誰かが冗談を言うと「おもしろい」と感じるのでしょうか？ 関東と関西でユーモアの好みに違いはあるのでしょうか？ ユーモアが差別を助長したり，あるいはストレスを緩和したりすることはあるのでしょうか？ 本書ではこのようなユーモアに対する人間の心の動きを分析し，分かりやすく紹介します．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社